CARLO FELICE MANARA

PROBLEMI RELIGIOSI POSTI DALLA FILOSOFIA DELLA SCIENZA

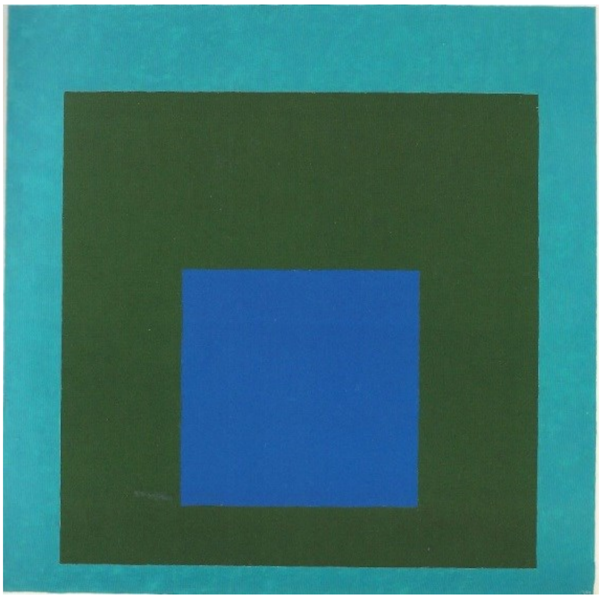
Note per il corso *Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza*, tenuto per il ciclo di specializzazione della Facoltà Teologica dell'Italia Settentrionale, Milano, negli anni accademici 1976-77, 1977-78, 1978-79.

NdR. Note dattiloscritte reimpaginate, giugno 2017.

INDEX RERUM

V – LA LOGICA NEL PROCESSO SCIENTIFICO. LA FORMALIZZAZIONE DELLA LOGICA E LA LOGICA MATEMATICA

K.S.Malevich. Quadrato bianco, 1918. Moma, New York



J. Albers. Omaggio al Quadrato, 1951. Rinnovata Speranza

I - INTRODUZIONE

1 - Cultura e scienza.

Se dicessi che sento tutta la responsabilità di un corso quale quello che mi è stato affidato e che mi accingo ad iniziare si potrebbe pensare ad un luogo comune; ciò va messo forse sul conto del logorio delle parole e dei modi di dire e quindi della inefficacia della loro espressività.

Tuttavia penso che chiunque mi ascolta in buona fede possa rendersi chiaramente conto del mio imbarazzo e della mia paura. È infatti sempre difficile problema quello di introdursi in un ambiente culturale che ci è estraneo e che di conseguenza ha dei modi di esprimersi, delle tradizioni, delle esigenze e dei problemi che ci sono ignoti; quindi il cercare di dire qualche cosa di valido e di interessante in un ambiente come questo può sembrare il risultato di una presunzione. Inoltre la mia formazione di matematico mi rende poco adatto a capire i problemi della teologia e la mentalità, il modo di pensare, i fondamenti dei miei ascoltatori. Infatti non è possibile dimostrare tutto, né risalire sempre alle origini nell’esposizione del proprio pensiero; invece occorre sempre far conto delle conoscenze acquisite, della mentalità che si è sviluppata durante le ricerche e gli studi precedenti, delle cose che insomma gli ascoltatori danno per scontate e del linguaggio al quale essi sono abituati. Rimane tuttavia vero che i problemi di cui vorremmo occuparci nel nostro lavoro futuro sono forse importanti per tutti: per coloro che hanno una mentalità che potremmo indicare come scientifica e per coloro che hanno una mentalità che potremmo dire umanistica. Non voglio con questo accenno riprendere il discorso sulle "Due culture", discorso che pare ritornare periodicamente e che non sempre viene impostato in modo giusto; analogamente non voglio entrare nella discussione sulla 'nuova cultura', che appare di moda in questi ultimi tempi. Vorrei osservare che il termine *cultura* viene utilizzato oggi nelle accezioni più svariate, e che questo uso abbastanza largo e variato porta a dare al termine stesso un significato sempre più impreciso e sfumato; per esempio in tempi recenti il termine *cultura* viene usato sempre più spesso nel senso di 'costume', 'abitudine' di vita, ecc., e quindi il significato di cultura nel senso abituale va sempre più perdendosi. Noi vorremmo riprendere un significato più ristretto del termine, che porterebbe a rifarsi al fondamento del termine stesso, che implica una certa massa di conoscenze, organizzata in modo da poter permettere dei giudizi liberi ed autonomi su tutta la realtà nella quale l'uomo è coinvolto; e dicendo 'tutta la realtà' vorremmo indicare anche i giudizi che riguardano l'origine e il fine dell'uomo, il significato della società e della storia umana, i rapporti con tutte le forme del sapere. Il fatto che nell'accezione classica del termine 'cultura' questa libertà di giudizio fosse riattaccata piuttosto alla conoscenza delle discipline che vengono chiamate 'umanistiche' non è riduttivo del significato stesso. Sta di fatto piuttosto che i cultori delle discipline umanistiche sembrano più disposti e più direttamente interessati alla considerazione dei problemi che riguardano tutta la realtà umana.

Ho detto "sembrano" più disposti e di fatto molto spesso lo sono; tuttavia va detto che nei secoli recenti nella realtà umana si è inserita nel modo sempre più vistoso e imponente la scienza della natura, di modo che la realtà umana viene di giorno in giorno sempre più permeata da questa realtà nuova, dalla sua mentalità, dai suoi metodi, dai riflessi psicologici che gli imponenti risultati sulla manipolazione della natura hanno dato nella direzione della realizzazione dell'uomo. Ricadiamo quindi nella problematica della cultura scientifica contrapposta alla cultura di vecchio stile, che per intenderci diremo umanistica. È ben vero che a rigore si potrebbe dire che l'ampiezza dei risultati materiali non autorizza la scienza della natura a porsi come cultura, così come la vastità dell'Egitto non faceva superiorità culturale nell'epoca antica rispetto al pensiero greco contemporaneo; ma si potrebbe rispondere che questa ampiezza di risultati nasce da una nuova maniera di concepire la conoscenza della natura, da una nuova metodologia, da un nuovo pensiero. E di qui nasce l'infatuazione di molti nei riguardi della scienza della natura e la pretesa che questa mentalità scientifica costituisca una nuova cultura, mentre - a parere di chi scrive - costituisce soltanto una nuova massa di problemi posta alla unica cultura nel senso stretto, vecchia e nuova.

Invero la cultura, come abbiamo già detto, è fondamento di giudizio libero ed indipendente che l'uomo dà della realtà e quindi non può stare senza libertà, così come essa è fondamento di libertà vera, che non consiste tanto nella possibilità di manipolare la realtà fisica esteriore a noi, ma nel poter pensare e giudicare rettamente delle cose veramente importanti per l'uomo, cioè della propria vita, dei propri rapporti con le supreme realtà dell'universo. In questo senso le conquiste, anche le maggiori e più impressionanti, di una scienza che ignora i concatenamenti di tutte le cause che esistono al mondo, di una tecnica che si pone come la sola maniera di liberare l'uomo (che non avrebbe in altro senso bisogno di redenzione) costituiscono non dei mezzi di liberazione ma dei mezzi di schiavitù nuovi per l'uomo. Ne abbiamo gli esempi in ogni campo della scienza e della vita associata: ogni giorno siamo sempre più coscienti del fatto che la possibilità di manipolare la realtà ha dato oggi all'uomo il potere di fare del male su scala mondiale; per poter avvelenare tutta l'acqua e l'aria esistente, per poter scatenare delle quantità di energia che possano provocare dei cataclismi, che possono diffondere nell'aria di tutto il mondo delle particelle radioattive capaci di compromettere la salute di centinaia di generazioni nel futuro e magari anche cancellare ogni forma di vita nella terra, o almeno di vita così come la conosciamo noi oggi. Ed ancora, le tecniche di manipolazione psicologica, le conoscenze di sociologia, le tecniche della cibernetica e della teoria dell'informazione possono sollevare delle ondate di opinione che deformano radicalmente la conoscenza dei fatti, le opinioni e le maniere di reagire di masse enormi di uomini.

Si potrebbe dire, e viene detto da molte parti, che l'umanità di oggi si trova sull'orlo dell'abisso e che il potersi fermare dipende non tanto dalle forze della natura che essa ha potuto dominare, ma dalla concezione etica e morale che essa intende adottare. Da questo punto di vista si potrebbe dire che la manipolazione della scienza (iniziata dall'Illuminismo con dei programmi orgogliosi, che tendevano a presentare la scienza come la sola dottrina che redime l'uomo) ha raggiunto oggi la dimostrazione concreta dei disastri che può costruire, e quindi la dimostrazione chiara della assurdità degli orgogliosi programmi degli illuministi di tutti i tempi. Da questo punto di vista la scienza della natura può confermare, con gli stessi disastri che essa provoca ponendosi come dottrina ultima e totale, che possiede dei limiti, che non può dare tutto all'uomo, che essa invece postula altre condotte razionali, che possono dare delle altre certezze e dei diversi fondamenti per la risoluzione dei veri problemi dell'uomo.

A nostro avviso infatti, i problemi dell'uomo di oggi non sono diversi da quelli che sono presentati dal libro di Giobbe: il problema del dolore che si presenta all'uomo come una circostanza irrazionale, che non ha spiegazione, che non ha perché, che possiede una realtà non comunicabile ma sentita direttamente come un'esperienza personale; e se anche non vi fosse dolore in una vita umana (cosa che non consta che sia mai avvenuta) la coscienza della morte incombente ad ogni esperienza umana cosciente, così come la coscienza del fatto che la nostra origine non è nelle nostre mani, costituiscono dei problemi che nessuna scienza della natura potrebbe risolvere; invero le risposte che la scienza potrebbe dare non aiutano la persona a trovare in se stessa la forza per riemergere validamente dalle esperienze dolorose e dai pensieri generati dalla coscienza dei propri limiti e della propria fine, pensieri che costituiscono una fonte perenne e quotidiana di angoscia per ogni uomo. Ciò che è stato detto fin qui non vuole essere la soluzione di problemi che sono troppo gravi in se stessi e che hanno formato oggetto di meditazione dell'uomo fin dai primi tempi del pensiero umano; ma abbiamo voluto soffermarci sopra questi problemi per introdurre in qualche modo la linea del nostro futuro lavoro.

2 - Importanza della scienza nel nostro mondo.

In sostanza la situazione della nostra civiltà di fronte alla scienza di oggi è pregiudicata dal fatto che la scienza ha nella nostra società e nella nostra mentalità un posto ed un'importanza, vera o pretesa, che non ha forse avuto mai. L'importanza vera, a sua volta, può presentarsi duplicemente: con una influenza clamorosa, e con una influenza sottile. La influenza clamorosa è basata sui risultati grandiosi che stanno sotto i nostri occhi tutti i giorni. Si potrebbe dire, senza timore di esagerare, che la scienza domina ogni istante della nostra giornata, dal momento in cui ci svegliamo ed accendiamo una lampadina elettrica, a quello in cui ci addormentiamo. La nostra vita è dominata dalla tecnica, che è in contatto immediato con la scienza più avanzata; basta riflettere alla importanza della fisica, della chimica, delle varie tecniche della ingegneria (nella costruzione di case, nei trasporti, nelle comunicazioni, nello sfruttamento delle energie naturali, ecc.), della medicina, della biologia, della farmacologia, della psicologia, della sociologia...La nostra vita è talmente influenzata dalla scienza che si potrebbe dire che un uomo lasciato solo in una foresta incolta difficilmente saprebbe sopravvivere senza qualche strumento o qualche conoscenza che gli viene direttamente dalla scienza; certe grandi nazioni fanno dei 'corsi di sopravvivenza' ai loro piloti di aerei che dovessero per caso cadere nelle foreste; quindi la sopravvivenza dell'uomo in queste condizioni non viene lasciata agli istinti o all'addestramento avuto dai genitori o dalla tribù, ma ancora una volta viene affidato a delle conoscenze che possono essere dette scientifiche.

Abbiamo detto che la tecnica di oggi è strettamente legata alla ricerca scientifica, essendo con essa in una continuità che non è stata mai conosciuta prima; si potrebbe dire che oggi le scoperte veramente scientifiche difficilmente possono essere fatte da singoli ricercatori, anche se geniali. Con questo beninteso non si vuole dire che oggi non si possono più fare delle scoperte anche clamorose, che potrebbero anche avere come conseguenza il cambiamento del nostro modo di vivere; vogliamo soltanto dire che queste scoperte rimangono ad un livello che potremmo dire artigianale e ben al di sotto del livello specificamente scientifico. È questa una realtà che sfugge molto spesso all'uomo della strada, al politico, a quelli che fanno la opinione pubblica e prendono le decisioni, i quali ancora mostrano di credere che si possano dare delle scoperte scientifiche 'casuali', così come vengono raccontate da certa facile aneddotica.

Ma l'influenza della scienza sulla nostra civiltà e sulla nostra stessa vita quotidiana non si basa soltanto su questi risultati clamorosi, che abbiamo sotto gli occhi tutti i giorni e quindi possiamo facilmente osservare; essa ha anche un aspetto molto più sottile e sotterraneo, che consiste nella infiltrazione del metodo, della mentalità, del vocabolario scientifico nel nostro modo di pensare e di giudicare. Si tratta di una infiltrazione più che di una dominazione, ma non per questo meno importante e pesante. Il suo peso è anche aumentato dal fatto che la scienza richiede, da parte di chi la coltiva, un impegno che potrebbe addirittura essere qualificato come una sorta di ascesi: occorre costanza, pazienza, sacrificio, fatica, perseveranza per dedicarsi seriamente alla scienza; occorre essere disposti ad affrontare delusioni, scoraggiamenti; occorre saper superare pregiudizi e condizionamenti, sottoporsi alle verifiche dell'esperimento ed essere disposti ad accettare il giudizio in ultima istanza della realtà, anche se questo giudizio richiede ulteriori sforzi e può rendere inutili tante fatiche precedenti e tanti sacrifici sopportati. Inoltre la ricerca scientifica richiede da parte dei governi e delle organizzazioni dei sacrifici sempre più imponenti e gravi, in tempo, denaro ed organizzazione. È quindi anche spiegabile che la scienza abbia nel mondo di oggi un prestigio che è proporzionato all'impegno che essa richiede e ai risultati materiali e visibili che ottiene.

3 - Le pretese dello scientismo.

I risultati imponenti che la scienza ha conseguito nello sfruttamento delle energie della natura e nell'organizzazione della nostra vita spiegano, almeno fino ad un certo punto, le pretese dello scientismo, e le costruzioni teoriche, tipiche dell'illuminismo e del positivismo, che volevano fare della scienza l'unica dottrina che può dare la libertà all'uomo. Questa libertà che la scienza dovrebbe dare all'uomo è di varie sorti. Anzitutto, secondo questa concezione, la scienza dà all'uomo la libertà dalla paura: i fenomeni naturali, i fenomeni astronomici, le pestilenze e le epidemie che terrorizzavano una volta le plebi sono oggi spiegati, perché la scienza non si accontenta di farli risalire ad una volontà cieca e forse cattiva, superiore all'uomo, ma spiega la loro origine e quindi toglie loro quell'aspetto terrorizzante che era dato loro dalla ignoranza delle cause.

In secondo luogo la scienza dà all'uomo la libertà dalla fatica materiale ed abbrutente, che viene spesso richiesta dalla lotta per la vita. La libertà dalla fatica materiale permette all'uomo anche di interessarsi di cose diverse dalla pura ricerca della sopravvivenza materiale; pertanto questa libertà dalla fatica è anche occasione ed origine della libertà politica dell'uomo, perché rende inutile anche la vecchia organizzazione della produzione e permette di portare i beni materiali a disposizione di tutti.

Questi pensieri si trovano già in Francesco Bacone di Verulamio, che nella sua opera *New Atlantis* arriva addirittura alla mitizzazione del tecnicismo, descrivendo un'isola sconosciuta nella quale la felicità degli abitanti non è data dalla buona organizzazione politica, ma dal fatto che in essa vengono messi in opera tutti i possibili ritrovati tecnici. Gli stessi atteggiamenti sono assunti dagli Enciclopedisti, i quali considerano la scienza soprattutto come una guida per lo sfruttamento ed il soggiogamento delle forze naturali. Da ciò l'importanza che essi danno alla meccanica razionale, tra tutti i rami della matematica; da ciò le descrizioni a volte minutissime delle macchine usate nei vari procedimenti di produzione dell'epoca. E va rilevato che anche in questo F. Bacone si presenta come un precursore dell'Illuminismo, con le minutissime descrizioni di meccanismi e di strumenti che si trovano per esempio nella *Parasceve ad Historiam naturalem et experimentalem*. Questo stesso atteggiamento è stato fatto proprio dal marxismo e dal positivismo classico di A. Comte.

In terzo luogo la scienza, secondo questo modo di vedere, può dare all'uomo anche l'equilibrio interiore, liberandolo dalle angosce. Questo atteggiamento è relativamente più moderno dei primi due, e si presenta sotto varie forme: dalla ricerca di un equilibrio interiore che si ottiene agendo sui processi biochimici a livello cerebrale, da cui viene tutta la ricerca di droghe psicotrope (per esempio gli ansiolitici), all'impostazione freudiana, più profonda, ma sempre ispirata alla mentalità illuministica. Invero è tipicamente illuministico l'atteggiamento di colui che vuole liberare l'uomo da angosce e complessi cercando di renderlo cosciente della loro origine, che viene ricercata in avvenimenti infantili, in esperienze sgradevoli e traumatizzanti, rimosse dalla memoria e sepolte nel subcosciente. Questo giudizio non è soltanto di chi scrive, ma si trova anche nella critica contemporanea alla psicanalisi. Scrive per esempio Eric Fromm in *Anatomia della distruttività umana* (traduzione Silvia Stefani - Milano 1976):

"......*Freud fu uno degli ultimi esponenti della filosofia dell'Illuminismo. Credeva sinceramente nella ragione come nell'unica forza che l'uomo possieda e che sola può salvarlo dalla confusione e dal decadimento. Postulò sinceramente l'esigenza della conoscenza di sé mettendo a nudo i desideri inconsci dell'uomo. Superò la perdita di Dio rivolgendosi alla ragione, e si senti penosamente debole; ma non si rivolse a nuovi idoli......"* (Cap. I- pag. 56).

Infine, come coronamento di tutte queste libertà, la scienza pretende di liberarci da ogni mistero sull'origine dell'uomo, della natura, della società; e quindi di predire lo sviluppo futuro della società umana e di sostituire la morale nel prescrivere al singolo ed alla società la condotta da tenere, la direzione degli sforzi da compiere, i sacrifici da superare. Non è necessario insistere tanto per ricordare quale sia il credito che il marxismo riscuote presso molti, presentandosi appunto come una spiegazione 'scientifica' della società, come una analisi delle vere forze che muovono l'uomo e che spiegano la storia. Come conseguenza di tutte queste conquiste di libertà la scienza si gonfia fino a diventare scientismo, cioè fino a presentarsi come l'unica dottrina capace di una redenzione dell'uomo, l'unico modo per conquistare le libertà cui abbiamo accennato. Questo atteggiamento, tipico del positivismo del secolo XIX, viene espresso per esempio da Victor Hugo, che fa dire ad uno dei suoi personaggi "*Ceci tuera cela*", alludendo ad una biblioteca ed alla Cattedrale di Parigi (Victor Hugo - *Notre Dame de Paris*). Oppure fa pronunciare ad un altro dei suoi personaggi una tirata sul progresso dell'umanità, descrivendo i quattro eroi, che si allontaneranno nelle quattro direzioni cardinali per annunciare il nuovo vangelo della verità e del progresso: Diderot che marcia verso la bellezza, Voltaire verso la verità, Turgot verso l'utilità, Rousseau verso la giustizia (Victor Hugo - *Les Misérables*). Questi enunciati presi in sé a volte ci fanno sorridere, soprattutto pensando all'ingenuo entusiasmo di coloro che non prevedevano i disastri che la scienza ha favorito e dei quali noi siamo stati testimoni. Ma nella loro grezza ingenuità costituiscono la testimonianza di una tentazione a cui l'uomo è sottoposto ad ogni generazione, tentazione che lo porta a sperare di poter uscire da solo dalle proprie miserie, magari cercando di negarle con l'esaltazione del progresso o cercando di dimenticarle nell'attesa di uno stato di felicità futura, dovuta esclusivamente al dominio delle forze della natura ed alla buona organizzazione della società.

4 - Programma generale del corso.

Ciò che abbiamo cercato di esporre brevemente nelle pagine che precedono depone a favore dell'utilità di rendersi conto del metodo e della mentalità della scienza moderna, per giungere a vedere chiaramente il suo potere e i suoi limiti, e per poter ritrovare un equilibrio di pensiero che a volte viene scosso dall'invadenza di certi metodi e di certe affermazioni di principio. Senza voler anticipare lo svolgimento successivo, vorremmo dire che occorre evitare in questo lavoro due eccessi, che stanno per così dire ai poli opposti.

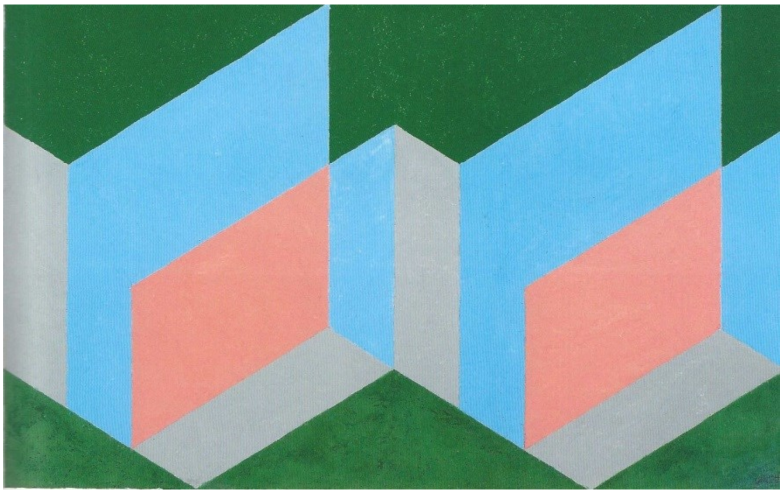
Uno di questi eccessi potrebbe essere descritto brevemente come un complesso di inferiorità nei riguardi della scienza, delle sue realizzazioni e dei suoi metodi; un cedere di fronte alle pretese dello scientismo per timore di essere giudicati ignoranti, o poco informati o culturalmente immaturi.

L'altro di questi eccessi potrebbe essere forse descritto come una pretesa di 'apologia facile', che potrebbe essere presentata, in forma rozza, rudimentale e schematica con il ragionamento seguente: la scienza non fa che mettere in evidenza il cambiamento delle cose della natura, il concatenamento delle cause e degli effetti, l'ordine intelligibile che regna nell'universo. Pertanto la scienza fornisce le premesse delle celebri argomentazioni con le quali San Tommaso (S. Th. P. I Q. II - art. 3) dimostra l'esistenza di Dio. Dunque la scienza conduce a Dio.

Questa argomentazione, che ha dato luogo a polemiche, discussioni e ricerche, si può dire da quando è stata espressa, sarà esaminata in seguito. Ci limitiamo qui a dire che nella sua materialità potrebbe essere considerata forse un po' troppo sbrigativa; il che non significa che intendiamo negare la sua validità, nei riguardi della sua conclusione e della tesi sostenuta nell'articolo citato della *Summa*, articolo che ha per titolo *Utrum Deus sit*.

Il nostro lavoro si svolgerà cercando di evitare gli scogli che abbiamo ricordato: le linee direttive generali della nostra esposizione puntano sostanzialmente sulla problematica che abbiamo cercato di esporre e che sorge dall'esistenza della scienza moderna e del posto che essa ha nel mondo, nella mente e nel comportamento dell'uomo di oggi. Parleremo anzitutto del problema della classificazione della scienza, e della delimitazione del concetto di scienza; in particolare analizzeremo il significato della rivoluzione galileiana della scienza, significato che a nostro parere sta nella matematizzazione, cioè nella adozione della matematica come linguaggio di elezione della scienza della natura. Il fatto che la matematica sia stata scelta come il linguaggio della scienza della natura ha portato le sue conseguenze anche sulla stessa matematica; si potrebbe dire, anticipando ciò che verrà esposto nel seguito, che questa scienza ha oggi cambiato profondamente il suo modo di vedere se stessa, ed ha esteso il proprio dominio ben al di là di quello che era considerato il suo oggetto specifico nelle trattazioni classiche. In particolare anche un ramo della logica oggi è in stretta connessione con certi rami della matematica, e questa connessione ha avuto la sua influenza anche sulla logica, stimolando la formulazione e la risoluzione di problemi che erano ignoti alla logica classica.

Dedicheremo quindi una certa attenzione all'analisi della matematica, perché pensiamo che la matematizzazione sia un fatto molto importante, se non decisivo, per la mentalità e per i metodi di tutta la scienza di oggi. Dopo l'analisi dei problemi logici della matematica ritorneremo ad analizzare i rapporti tra il sapere scientifico ed altre forme di conoscenza e di sapere. In particolare analizzeremo il fondamento della pretesa della scienza di diventare sapienza, cioè dottrina totale che esaurisce anche la conoscenza dei primi principi e dei fini dell'universo e dell'uomo.



J. Albers. Omaggio al Quadrato. 1944. Tautonimo

II - LA DEFINIZIONE DEL CONCETTO DI SCIENZA

1 - La scienza come conoscenza certa e motivata.

Non vorremmo lasciarci prendere, all'inizio della nostra trattazione, dalla tentazione di definire l'oggetto di questa. Sarà, semmai, il risultato finale del nostro lavoro. Tuttavia appare più che legittimo il cercare di descrivere in modo il più possibile preciso che cosa intenderemo con il termine *scienza*, di modo che il nostro lavoro futuro sarà quello di precisare sempre di più il significato del termine, di restringerlo, di renderlo preciso ed il più possibile univoco. Inizialmente, e come tentativo, si potrebbe cercare di descrivere la scienza come *una conoscenza certa motivata e spiegata dalla realtà*. Osserviamo, a proposito di questa frase, che in essa sono contenuti dei termini che necessariamente sono dati per noti: per esempio il termine *conoscenza*.

Prima di iniziare ogni ulteriore analisi, osserviamo che parlando di *conoscenza* intendiamo ovviamente parlare di conoscenza intellettuale. Con questo non si vuole assolutamente negare che possano esistere anche altri modi di conoscenza, per esempio la conoscenza per mezzo del senso. Ricordiamo che San Tommaso ammette negli animali non soltanto una conoscenza sensibile, ma addirittura una sorta di giudizio, come si può constatare per esempio dal testo seguente: (P. I. Q 83 (De libero arbitrio) a. I in c):

“......*quaedam agunt absque judicio, sicut lapis movetur deorsum, et similiter omnia cognitione carentia. Quaedam autem agunt judicio, sed non libero, sicut animalia bruta. Judicat enim ovis videns lupum, eum esse fugiendum, naturali judicio, et non libero; quia non ex collatione, sed ex naturali instinctu hoc judicat: et simile est de quolibet judicio brutorum animalium*......»

Diamo quindi per scontato il significato, anche generico e sfumato, del termine *conoscenza* e cerchiamo di analizzare la frase che abbiamo enunciato, soprattutto per osservare che in essa sono enunciate implicitamente certe tesi che costituiranno nel seguito il nucleo della nostra problematica e che saranno approfondite, anche se a diversi livelli ed a differenti riprese. La prima tesi riguarda il fatto che la scienza viene presentata come una conoscenza di una *realtà*. Sappiamo bene che anche sul significato del termine *realtà* il dibattito è ancora attuale e teso; tuttavia noi prendiamo questo termine nel significato primitivo ed acritico che ha nel linguaggio comune, nel quale viene utilizzato senza prevenzioni e senza scrupoli. Anche in questo caso ci ripromettiamo di ritornare sul problema con ulteriori approfondimenti; per il momento osserviamo che nel nostro enunciato vi è l'affermazione implicita di un atteggiamento ingenuamente ed acriticamente realistico che è tipico, a nostro parere, della scienza, nel momento in cui viene costruita.

In altre parole vorremmo dire che lo scienziato, quando fa scienza e prima di riflettere sul proprio operato o di ritornare criticamente sul proprio lavoro e sul significato di questo, con un atto primitivo e spontaneo si pone di fronte ad una realtà che sta fuori di lui. Si consideri per esempio il passo seguente:

".....*L'uomo è l'unico animale che non solo conosce gli oggetti, ma sappia di sapere. L'uomo è l'unico animale che, oltre all'intelligenza strumentale, abbia la ragione, la capacità di usare il suo pensiero per <u>capire</u> oggettivamente, cioè per <u>conoscere la natura delle cose come sono di per sé</u>, e non solo come strumenti della propria soddisfazione*" (la sottolineatura è nostra).
Dotato della ragione e dell'autocoscienza, l'uomo è consapevole di se stesso come essere distinto dalla natura e dagli altri, è consapevole della propria impotenza e della propria ignoranza; è consapevole della propria fine: la morte. (Eric Fromm - *Anatomia della distruttività umana* - Trad. Silvia Stefani - Milano (1976) Mondadori. Cap. X. *L'aggressione maligna*, pag. 285, dove si parla della natura umana).

Rinunciamo per il momento a giudicare se questo atteggiamento di radicale realismo dello scienziato sia giustificato e fondato; ci limitiamo ad accertare il fatto, che appare indubitabile, ed a rimandare le interpretazioni di esso al seguito. Diciamo che il fatto appare indubitabile perché chiunque apra una rivista di scienza (non di filosofia della scienza, ma di scienza: fisiologia, botanica, chimica, fisica, sociologia, neurologia ecc.) si accorge subito che nell'atto della ricerca lo scienziato si pone '<u>di fronte alle cose, per vedere come stanno</u>'. Questo atteggiamento di realismo implicito ed ingenuo si nota perfino nel matematico, il quale è ben conscio, con un atto riflesso, dell'astrattezza di certe teorie che sta costruendo in modo libero e quasi staccato dal mondo; ma nel momento della ricerca della soluzione di un problema o della ricerca di una nuova proprietà, della dimostrazione di un nuovo teorema o di nuovi collegamenti tra idee già note ha pure lui questo atteggiamento, quasi che le idee costruite artificialmente abbiano una loro esistenza, siano diventate anche loro un genere di *cose*.

Si tratta, ripetiamo, di un'osservazione che potrebbe riguardare anche soltanto uno stato psicologico, ma che tuttavia appare difficilmente confutabile; le conseguenze di queste osservazioni in sede metafisica non saranno tratte qui, perché il trarle esula in certo modo dal nostro compito, ma ci basti averle rilevate esplicitamente e direttamente.

2 - Vari gradi di certezza e vari modi di spiegazione.

Una seconda tesi, che è contenuta implicitamente nella frase che abbiamo enunciato, riguarda la certezza della conoscenza scientifica. Anche a proposito di questa seconda tesi si potrebbero fare moltissime affermazioni, che saranno riprese nel seguito. Sarebbe superfluo ricordare la distinzione classica tra *doxa* (conoscenza per opinione) ed *episteme* (conoscenza scientifica); tuttavia riteniamo che non si possa dare scienza senza che vi sia una certa misura di certezza nella conoscenza di cui si tratta. E riattaccandoci all'osservazione fatta prima a proposito della prima tesi implicita, vorremo dire che questa certezza, almeno nell'accezione comune, non è un puro stato psicologico. Sappiamo bene che il paranoico è certo e fissato nelle proprie idee, che anche le allucinazioni possono portare con sé un carattere di certezza. Ma vorremmo osservare che la certezza di cui intendiamo parlare si distingue dalla pura situazione di 'sicurezza delle proprie sensazioni o delle proprie idee', che è invece uno stato puramente psicologico. Questo atteggiamento, che identifica nella certezza uno dei caratteri essenziali della conoscenza scientifica, non è del resto nuovo; lo si trova per esempio in S. Tommaso il quale dichiara esplicitamente: "*Certitudo pertinet ad dignitatem scientiae*". I Q. I a. 5. (Utrum sacra doctrina sit dignior aliis scientiis). Ed anche: "*Nomen scientiae importat quamdam certitudinem judicii ....cognitio rerum humanarum vocatur scientia, quasi communi nomine importante certitudinem judicii appropriato ad judicium, quod fit per causas secundas*". II – II, Q. 9, a. 2 (Utrum scientiae donum sit circa res divinas).

Rimane ora il grave problema di analizzare quale sia il fondamento di questa certezza scientifica, che non si riduce alla pura sicurezza psicologica. Siamo ben consci del fatto che sarebbe difficile dare dei criteri sicuri per distinguere bene e sempre questi due stati d'animo; ciò non toglie che la certezza di cui parliamo a proposito della scienza possiede - a nostro parere - la caratteristica di essere fondata su una realtà che viene supposta esistente e in qualche misura conosciuta.

Per cercare di iniziare l'analisi di questo carattere della conoscenza scientifica, vorremmo dire che la certezza della scienza è qualche cosa di più della pura certezza dei fatti; invero una pura e semplice registrazione dello stato delle cose (cioè una raccolta di testimonianze, o di *protocolli*, come si dice nella terminologia del neopositivismo) pur portando con sé il carattere di certezza, non è ancora certezza scientifica, ma ne è soltanto il fondamento. Proseguendo l'analisi vorremmo osservare che la certezza che caratterizza la conoscenza scientifica si riattacca strettamente a quel realismo primitivo, acritico che costituisce una caratteristica della scienza nel momento in cui nasce. Così come lo scienziato è ingenuamente alla presenza di una *realtà* (quale che sia per il momento il significato che vogliamo attribuire a questo termine), nello stesso modo trae la certezza che sta cercando dal fondamento di questa realtà che cerca di conoscere.

Cercando per ora di usare un linguaggio sfumato ed impreciso, vorremmo dire che la certezza della scienza è fondata sui fatti, ma tende per natura sua a diventare una certezza di fatti motivati e in qualche modo spiegati. Anche qui possiamo osservare che i termini *motivare* e *spiegare* sono sfumati e non certo precisi; li abbiamo scelti volutamente proprio perché buona parte del nostro compito futuro è proprio quella di precisare il significato della spiegazione scientifica. Per ora ci limitiamo ad osservare che questa esiste sempre, quando esiste conoscenza scientifica: per esempio la storia non si limita ad enunciare i fatti, ma sceglie i fatti *notevoli* e li collega tra loro in modo che formino in qualche modo una *spiegazione* degli avvenimenti; ed abbiamo scelto la scienza che in certo senso è la più lontana dal concetto di spiegazione scientifica, quale è comunemente concepita, proprio perché la storia umana non è *spiegabile* in senso meccanicistico, così come ci si può illudere di fare con i fatti della natura. Ma vorremmo dire che anche nel caso della storia questa tendenza alla *spiegazione* resta ineliminabile; e tale tendenza si manifesta in tutte le altre scienze che possiamo passare in rassegna. Anche una scienza puramente descrittiva come la geografia cerca in qualche modo di spiegare la natura fisica del terreno ricorrendo alle altre scienze, oppure lo stato degli insediamenti umani, dandone delle ragioni che in qualche misura li spiegano, anche se non dimostrano fino in fondo che debbano essere in un modo piuttosto che in un altro.

Sorge ora immediatamente il problema di determinare e di specificare quale sia il tipo di spiegazione che la scienza accetta e che qualifica il sapere scientifico di fronte ad altri tipi di sapere. Anche la risposta a questa legittima domanda sarà sostanzialmente oggetto di tutto il nostro lavoro futuro; ci limitiamo qui per il momento a osservare che, come possano esistere in linea di massima molti gradi di certezza (ed intendiamo razionalmente fondata, non pura sicurezza psicologica) possono a priori esistere moltissimi tipi di spiegazione razionale di una certa realtà: dalla spiegazione, per quanto rudimentale, che viene data con una esposizione 'ragionata' delle cose, a quella che attinge alla chiarezza perfetta, perché attinge all'essenza, cioè conosce la natura dell'essere conosciuto. In questo senso ed a questo livello appare esemplare il testo di San

Tommaso che abbiamo citato sopra (N° I), nel quale si afferma che la certezza del giudizio viene ottenuta dalla certezza delle cause seconde dell'essere. Con altri termini, ma nella stessa linea, J. Maritain precisa che la scienza è la percezione di una necessità intellegibile (Cfr J. Maritain - *La philosophie de la nature. Essai critique sur ses frontières et ses objets*).

Pur accettando questa impostazione, vorremmo ripetere che il nostro compito futuro sarà proprio quello di indagare quali siano i procedimenti con i quali la scienza cerca di raggiungere questa spiegazione per le cause seconde, questa percezione della necessità intellegibile di cui si parla nei testi citati. Sappiamo che questo concetto di *spiegazione* non è accettato da tutti i filosofi della scienza; per esempio Pierre Duhem (*La théorie physique; son objet, sa structure*. – 1906. Cap. II - §4) distingue tra *rappresentazione* e *spiegazione*, asserendo esplicitamente che una teoria fisica non spiega i fenomeni.

Ovviamente si potrebbe risolvere questa questione dicendo che si tratta di intendersi sul termine *spiegazione*. Se si intende come spiegazione la precisazione delle cause di un fenomeno, allora si può essere d'accordo con l'Autore, perché le leggi matematiche che legano le grandezze messe in questione da una certa osservazione o da un certo esperimento non possono precisare quale sia la causa e quale sia l'effetto: la matematica è estranea a questi concetti. Ma se si accetta una concezione più larga del termine *spiegazione*, allora - come abbiamo detto - anche una descrizione ragionata, come quella della geografia, è implicitamente e tendenzialmente una presentazione di spiegazione.

Per soffermarci su un altro esempio, è chiaro che la tavola del sistema periodico degli elementi compilata dal chimico russo Mendeleieff non è una spiegazione delle proprietà degli elementi chimici. Tuttavia non è possibile negare che questa classificazione, fatta sulla base del peso atomico come era conosciuto a quei tempi, non ha lo stesso valore conoscitivo che avrebbe per esempio l'elenco dei nomi degli elementi in ordine alfabetico; invero nella classificazione secondo il peso atomico era in germe un'intuizione, che ha messo in evidenza la periodicità di certe proprietà ed ha stimolato le ricerche ulteriori. Questa descrizione organica degli elementi allora conosciuti ha costituito anche un mezzo conoscitivo per prevedere l'esistenza di altri elementi chimici, per ispirare la chimica successiva. È quindi chiaramente una ricerca dell'intellegibile che sta sotto il fenomeno osservato, ricerca fatta con i mezzi tipici della scienza sperimentale. Questa ricerca dell'intellegibile reale, che sta sotto le apparenze dei fenomeni, è testimoniata dallo stesso Duhem (loc. cit) il quale afferma:

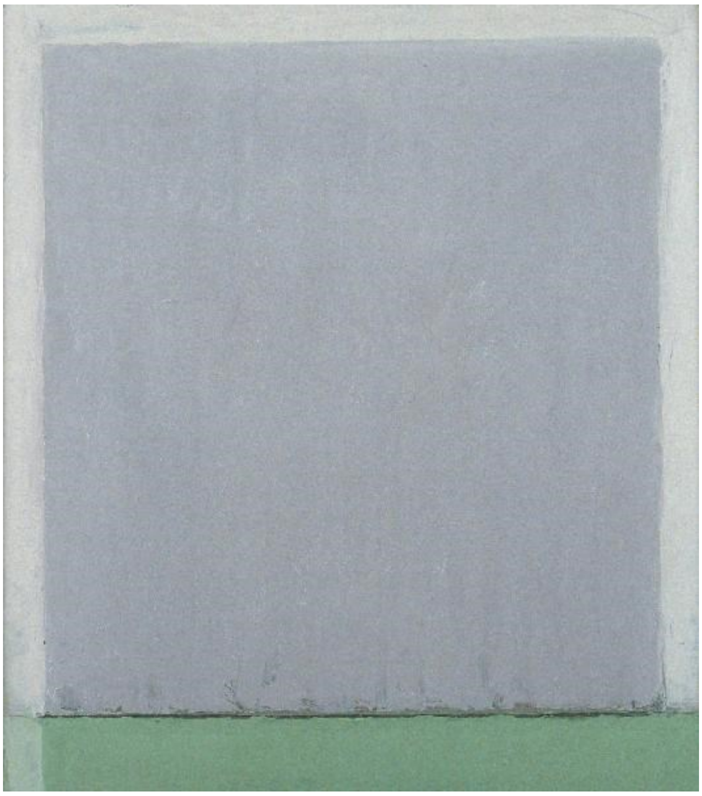
" .... *La teoria fisica non dà mai una spiegazione dei fatti sperimentali; essa non rivela mai le realtà che si nascondono sotto le apparenze sensibili; ma più la teoria diventa completa più noi sappiamo* *che l'ordine logico nel quale la teoria mette in ordine le leggi sperimentali riflette un ordine ontologico, più noi sospettiamo che le relazioni che la teoria stabilisce tra i dati di osservazione corrispondono alle relazioni reali tra le cose, più noi sentiamo che la teoria tende verso una classificazione naturali. Il fisico non può dare ragione di questa convinzione:·i metodi di cui egli può disporre sono limitati ai dati di osservazione*."

3 - Il problema della certezza dei protocolli e l'intervento dell'osservatore nei fenomeni. Riprenderemo nel seguito questi problemi, dopo che avremo approfondito l'analisi del procedimento tipico della scienza. Possiamo tuttavia osservare subito che da questa ricerca di certezza, razionalmente conseguita mediante la spiegazione, la scienza viene portata in modo quasi necessario alla ricerca della obbiettività, cioè alla ricerca della garanzia che i protocolli dai quali parte la spiegazione non dipendano da circostanze psicologiche, o in generale dalla presenza di un osservatore che riferisce le proprie osservazioni con quel tanto di infedeltà ineliminabile che è propria di ogni trasmissione di informazioni fatta dall'uomo, in circostanze ordinarie .

Vedremo in seguito che questo problema ha fatto sentire tutta la sua gravità nella microfisica; non ci è possibile esporre qui in tutta la sua portata la difficoltà che si incontra a questo proposito e pertanto ci limiteremo ad esporla in modo discorsivo. Invero appare abbastanza ragionevole che un fenomeno della fisica classica o macroscopica, per esempio il corso di un astro sulla sua orbita, non sia influenzato dalla presenza dell'uomo che lo osserva. Invece a livello di fisica microscopica si potrebbe dire che per osservare un fenomeno è necessario perturbarlo: per esempio per osservare la (immaginata) traiettoria di un elettrone, è necessario colpirlo con un raggio di luce, il quale porta con sé un fotone che, quando rivela l'elettrone perché lo incontra, cambia necessariamente la traiettoria della particella osservata, ed in un modo che non può essere previsto né osservato in seguito. Questa circostanza potrebbe portare ad una aporia, ad una "contraddizione della osservabilità", che viene superata dalla meccanica quantistica uscendo fuori dagli schemi suggeriti da una comoda estrapolazione alla scala microscopica del nostro modo di rappresentarci le esperienze alla nostra scala.

Ritorneremo su questo argomento; qui ci limitiamo ad osservare che, anche senza queste difficoltà che insorgono alla scala atomica e subatomica, la scienza si pone come uno dei suoi problemi fondamentali quello di arrivare alla oggettività dei suoi protocolli, cioè alla loro indipendenza dall'osservatore singolo; questo risultato viene ottenuto spesso ricercando la intersoggettività delle osservazioni, e cercando di esprimere le osservazioni stesse in modo che il loro risultato non dipenda dal singolo osservatore e sia riproducibile con tecniche adatte da un osservatore qualsivoglia.

Si può osservare che il fenomeno ora ricordato, che avviene a livello della microfisica, trova un suo corrispettivo nelle scienze dell'uomo; si potrebbe pensare, per esempio, che quando uno psicologo fa un 'test' psicologico ad un soggetto, necessariamente interviene nella psiche del soggetto e quindi ciò che viene osservato non è lo stato psicologico del soggetto, ma la interazione tra l'operatore ed il soggetto. Questa difficoltà si aggiunge alle altre difficoltà che si pongono di fronte alla psicologia, proprio al momento della raccolta dei protocolli. Vale la pena di osservare ancora una volta che questo atteggiamento presuppone, anche se non in forma esplicita e riflessa, di fatto il postulato della esistenza di una certa realtà fuori dell'osservatore, che questi cerca di rappresentare in se stessa nel modo più obbiettivo possibile.



W. G. Congdon. Verso Primavera (Ianua Coeli) 1985

W. G. Congdon. Novità 1981

III - IL PROBLEMA DELLA CLASSIFICAZIONE DELLE SCIENZE.

1 - L’analisi dell’atto di conoscenza secondo S. Tommaso.

Dopo di aver analizzato brevemente il problema della definizione del sapere scientifico, si presenta un secondo problema: quello della classificazione delle scienze. È comprensibile che questo problema sia stato posto, in epoche classiche, e che sia considerato rilevante anche oggi, data l’enorme complessità dell'insieme delle scienze che si presentano alla nostra considerazione. Esporremo anzitutto la soluzione che viene data da J. Maritain (in *Distinguer pour unir. Les dégrès du savoir*, ed anche l'opera citata in II/2), partendo dall’analisi delle caratteristiche della conoscenza intellettuale umana, analisi che è stata svolta da S. Tommaso. I punti fondamentali di questa analisi si trovano esposti nella *Summa Theologica*, in particolare nelle Quaestiones 84, 85 e 86 della Pars I; la Quaestio 84 porta il titolo: 'Quomodo anima corpori conjuncta intelligat corporalia quae sunt infra ipsa, in octo articulis divisa'; la Quaestio 85 porta il titolo: 'De modo et ordine intelligendi, in octo articulis divisa' e la Quaestio 86 porta il titolo: 'Quid intellectus noster in rebus materialibus cognoscat, in quator articulis divisa'. Cercheremo di esporre brevemente in questa sede il pensiero tomista, rimandando ai testi per un ulteriore approfondimento.

Anzitutto l'intelligenza umana ed il suo atto, cioè l'atto del conoscere intellettualmente, non dipende in modo essenziale dalla materia, perché supera le circostanze che circoscrivono nel tempo e nello spazio le cose conosciute. Pertanto l'atto dell'intelligenza è, in linea di principio, un atto spirituale.

In secondo luogo l'atto del conoscere consiste essenzialmente nel ricevere in sé, da parte del conoscente, la cosa conosciuta attraverso una immagine; questa immagine, da parte del conoscente è una modificazione del conoscente stesso, ma, vista dalla parte della cosa conosciuta, è la stessa cosa conosciuta, nella sua essenza. Questa immagine quindi non è la cosa che si conosce, ma è - per così dire - lo stato del conoscente per mezzo del quale (quo e non quod) la cosa che si conosce si rende manifesta al conoscente. Non esiste quindi, in questa concezione, il problema del passaggio dalla idea al suo contenuto, perché l'idea non è la cosa che si conosce, ma è ciò mediante cui si conosce la cosa conosciuta. Questa idea della cosa conosciuta è talmente rappresentativa della cosa nel suo essere che si può dire che in certo modo (*intentionaliter* è la parola che viene usata) l'intelletto *diventa* la cosa conosciuta, anche se naturalmente conserva la propria essenza.

In terzo luogo nell'uomo il momento intellettuale della conoscenza, che si attua nel *divenire intentionaliter* la cosa conosciuta, è distinto, anche se non separato, dagli altri due momenti: il momento della percezione sensibile ed il momento della formazione del *fantasma* della cosa. In particolare la fantasia è quasi sempre presente, anche se non costituisce un momento essenziale della conoscenza: infatti per esempio i primi principi, come il principio di identità ed il principio di non contraddizione, sono appresi a livello intellettuale e non fantastico.

Come conseguenza di questa dottrina si ha che un momento essenziale della conoscenza intellettuale nell'uomo è dato dal procedimento di astrazione; questo è il procedimento attivo mediante il quale la mente umana coglie l'essenza della cosa conosciuta, superando il livello delle circostanze non conoscibili, come quelle che per esempio riguardano la individuazione dell'essere, le circostanze materiali che riguardano il sussistere hic et nunc della cosa conosciuta e così via. Si ha invero che "…*scientia non est singularium*", come dice San Tommaso, sulla scorta di Aristotele (Post. 25. Metaph. II - 8. Eth. VI - 8); e pertanto l'operazione attiva con la quale l'intelletto si appropria dell'essenza di una cosa, (*diventa* addirittura la parte a noi conoscibile di una cosa conosciuta), si traduce nell'operazione che lo conduce a cogliere un *universale*. E chiamiamo così un predicato che si può predicare con verità di molti enti, e che rimane lo stesso, anche nella diversità degli enti singolarmente presi; così come possiamo dire con verità che Pietro, Paolo e Giovanni sono uomini. Questo passaggio attraverso l'universale è dovuto alla debolezza della mente umana, la quale coglie in certo modo soltanto una parte della verità che riguarda l'essere.

Non che questa verità, per essere parziale, sia meno vera; invero nelle cose materiali che la mente umana conosce esiste una componente che rappresenta la potenzialità, la oscurità rispetto alla nostra conoscenza intellettuale; questa componente si chiama *materia*.

2 - I gradi di astrazione secondo la dottrina tomistica.

Da quanto abbiamo esposto brevemente nel paragrafo precedente, si trae quindi che nell'uomo la conoscenza avviene necessariamente (in generale almeno) attraverso un'operazione che è sostanzialmente riducente, operazione che viene detta di astrazione; ne consegue che, secondo questa dottrina, è possibile classificare i gradi di conoscenza intellettuale a seconda dei vari gradi di astrazione.


A.Mazzotta. *Astrazione….*

Occorre a questo punto ricordare che presso i classici si distinguono due forme principali di astrazione; quella che veniva chiamata *abstractio totalis* e quella che veniva chiamata '*abstractio formalis*. La prima potrebbe anche essere detta, secondo Maritain (loc. cit in II/2), *astrazione estensiva*; essa è l'astrazione che porta a considerare l'universale a partire dagli esseri singoli, come quando giungiamo al concetto di *uomo* partendo da Pietro, Giacomo, Giovanni. Invece l'astrazione formale porta alla conoscenza del 'tipo intellegibile' di un determinato essere, ed è l'astrazione con la quale separiamo l'essenza dell'essere da tutti i dati materiali e contingenti (Cfr. Caetano - *Commentaria super tractatum De ente et essentia Thomae de Aquino* (1496)).

Ora è proprio questo secondo tipo di astrazione che può condurre alla classificazione dei gradi di sapere; un primo grado, cui appartiene la scienza delle cose sensibili, riguarda gli esseri nella cui definizione (e quindi nella cui conoscenza intellettuale) deve entrare anche la materia: come quando si definisce l'uomo e non si può non dire che è un essere materiale. Un secondo grado riguarda gli esseri che possono essere realizzati nella materia, ma nella cui definizione la materia non entra; ed a questo grado di astrazione appartengono gli oggetti della matematica, secondo la concezione classica di questa scienza. Infine un terzo e superiore grado di astrazione riguarda l'essere in quanto tale; increato o creato, infinito o finito e così via. Questo è il grado di astrazione della metafisica.

Questa dottrina è esposta per esempio da San Tommaso (In Boeth. de Trinitate, Q. V, art. I): "…*Quaedam igitur sunt speculabilium quae dependent a materia secundum esse, quia non nisi in materia esse possunt; et haec distinguuntur, quia dependent quaedam a materia secundum esse et intellectum, sicut illa in quorum definitione ponitur materia sensibilis; unde sine materia sensibili intelligi non possunt, ut in definitione hominis oportet accipere carnem et ossa, et de his est physica scientia sive naturalis. Quaedam vero sunt, quae quamvis dependeant a materia sensibili secundum esse, non tamen secundum intellectum, quia in eorum definitionibus non ponitur materia sensibilis, ut linea et numerus, et de his est mathematica. Quaedam vero sunt speculabilia quae non dependent a materia secundum esse; quia sine materia esse possunt, sive nunquam sint in materia, sicut Deus et angelus, sive in quibusdam sint in materia et in quibusdam non, ut substantia, qualitas, potentia et actus, unum et multa, et hujusmodi, de quibus omnibus est theologia, id est divina scientia, quia precipuum cognitorum in ea est Deus. Alio nomine dicitur metaphysica, id est transphysica, quia post physicam dicenda occurrit nobis, quibus ex sensibilibus oportet in insensibilia devenire*......"

È da aggiungere che in questa concezione i dati del senso costituiscono l'origine delle conoscenze delle scienze nel grado inferiore di astrazione, così come la rispondenza alla realtà sensibile costituisce l'ultima istanza per garantire della validità di una conoscenza. Invece nel secondo grado di astrazione, quello che è proprio della matematica in questa concezione, la genesi delle nozioni e quindi anche l'ultima istanza della validità delle conclusioni è data dalla fantasia.

3 - Influenza delle scienze dei gradi superiori sulle scienze inferiori.

Dopo di aver esposto la dottrina classica della conoscenza, che porta alla classificazione delle conoscenze intellettuali umane secondo i tre gradi di astrazione, vogliamo impostare una analisi della conoscenza scientifica che prescinda da questa dottrina. Ciò faremo lasciando impregiudicata la questione sulla validità della dottrina stessa, perché intendiamo svolgere una analisi che non rechi con sé il germe del dubbio di essere fondata su una determinata metafisica. Pertanto l'analisi che svolgeremo sarà dedicata a quelle che sono classificate qui come le scienze dei due gradi inferiori di astrazione, e partirà dallo stato delle conoscenze scientifiche di oggi, ad un livello che potrebbe essere considerato come molto inferiore e meno penetrante dell'analisi classica, ma che vorrebbe adattarsi al metodo scelto da noi, metodo che preferisce partire dal basso prima di presentare le eventuali conclusioni.

Tuttavia, prima di incominciare l'analisi secondo questi criteri, vogliamo osservare che di fatto, storicamente, le scienze dei due gradi superiori di astrazione hanno sempre esercitato una specie di tutela, di influenza condizionante sulle scienze del grado più basso di astrazione. Le prove di questo fatto sono molte e si potrebbe dire che uno degli aspetti fondamentali della crisi rinascimentale della scienza è proprio quello dell'affrancamento della scienza della natura dai concetti e dagli schemi della metafisica. Si tratta di una polemica che si trova si può dire in ogni pagina del *Dialogo dei due massimi sistemi* di Galileo; ma si tratta d'altra parte di un atteggiamento che è comune a tutti gli scienziati dell'epoca i quali erano ben consci della necessità di rivendicare l'autonomia del metodo della scienza di fronte ad una metafisica che si andava svuotando, per ragioni che non vogliamo approfondire qui; basti ricordare per esempio la polemica di Blaise Pascal (1623 – 1662) contro il Padre Étienne Noël, superiore dei Gesuiti di Parigi(***). È stato tuttavia osservato che questa liberazione della scienza della natura dalla scienza del grado supremo di astrazione (la metafisica) non ha portato affatto ad una libertà totale dalla scienza del grado inferiore dell'astrazione; invero dalla tutela della metafisica questa sarebbe passata alla tutela della matematica. In questo evento storico, cioè nella matematizzazione (più o meno esplicita, più o meno approfondita) della scienza della natura, sta il vero aspetto radicalmente rivoluzionario della crisi rinascimentale della scienza della natura.

Arcetri: Villa Il Gioiello (Università di Firenze). La villa dove Galileo visse dal 1631 fino alla morte nel 1642, con l'interruzione del soggiorno romano.

Su questo aspetto ritorneremo più volte in seguito e ci limiteremo quindi a citare un passo del *Saggiatore* di Galileo, in cui viene esplicitamente enunciato il fatto che la matematica è considerata da Galileo il linguaggio della scienza della natura:

"........*la filosofia* (cioè la scienza della natura, secondo la terminologia dell'epoca) *è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*"

Troviamo qui una chiarissima dichiarazione del fatto che la matematica è la *cifra* in cui il libro della natura è scritto, cioè il linguaggio con il quale soltanto si può capire qualche cosa della natura. Si potrebbe dire che si iniziava il cammino che portava all'identificazione, fatta da

Descartes, della materia all’estensione e quindi doveva fare della geometria in certo modo il succedaneo della metafisica, almeno in quanto concerne la conoscenze delle cose materiali; ed in questo ordine di idee questo cammino portava nella direzione dell'atomismo classico, che voleva identificare le differenze tra le cose nelle differenze delle posizioni spaziali degli atomi che le costituiscono.

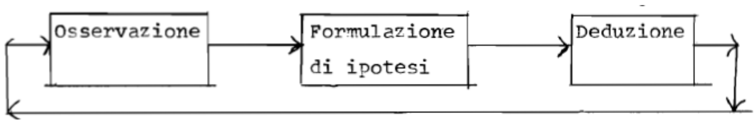
È chiaro che da questo punto di vista la matematizzazione delle scienze della natura costituisce una rivoluzione molto più importante della codificazione del metodo sperimentale, fatta da Francesco Bacone nel *Novum Organon* con l’enunciazione delle classiche regole, contenute nelle 'tabulae presentiae', 'tabulae absentiae', 'tabulae graduum'. Infatti, nella concezione del metodo sperimentale come il metodo unico per prendere contatto con la realtà, viene ignorato il problema del linguaggio, che invece viene in pieno affrontato nella concezione galileiana (e poi cartesiana) con l’indicazione del linguaggio matematico come unico linguaggio che permette di *leggere nel libro della natura*. A nostro parere la scelta di un linguaggio che permette una deduzione rigorosa e precisa, perché formalizzata al massimo, costituisce uno dei fattori fondamentali per il successo della concezione moderna delle scienze fisiche e (in potenza ed in prospettiva) anche per tutte le altre scienze della natura. Vogliamo tuttavia sottolineare l'importanza che l’osservazione continua ed assidua, la raccolta instancabile di fatti e di protocolli, il continuo confronto con la realtà sperimentale hanno per il progresso della conoscenza scientifica. Da questo punto di vista siamo d'accordo con J. Maritain (Op. cit. in II/2) il quale rimprovera come un 'grave errore di precipitazione intellettuale' da parte di Aristotele e degli antichi, così come da parte degli Scolastici, l'aver trascurato la raccolta assidua di informazioni che è una delle caratteristiche tipiche della scienza modernamente intesa.

Questa che Maritain chiama *precipitazione* ha provocato spesso l’illusione di giungere presto e facilmente all’essenza delle cose conosciute e quindi ha provocato l’illusione di poter procedere con un metodo deduttivo a partire dall’essenza supposta conosciuta. Ma le cose stanno purtroppo in modo diverso e il cammino del sapere è terribilmente faticoso e spesso frustrante; esso è descritto da Georges Thill (La fête scientifique - Ed. du Cerf, I973) con le parole seguenti: "....*ce n’est que par approches successives, par essais et erreurs, après le détour d'une longue opération technique, que la praxis scientifique obtient de rendre le discours de la science plus adéquat à ce qu' il est chargé de faire comprendre*.... ".

Questa fatica assidua e paziente, spesso deludente e comunque fondata sul lavoro assiduo e sulla umiltà costante di fronte alla natura ed ai fatti, è il fondamento essenziale di ogni costruzione scientifica.

4 - Il procedimento fondamentale della costruzione di una spiegazione scientifica.

Lasciamo da parte quindi per il momento la classificazione classica delle scienze per analizzare più da vicino il procedimento che ci pare tipico di ogni scienza. Tale procedimento non è affatto lineare né puramente deduttivo come si potrebbe pensare con una considerazione superficiale, neppure in una scienza che ci pare strettamente deduttiva come la matematica. I momenti fondamentali di questo procedimento potrebbero essere identificati nello schema ciclico seguente:



A proposito di questo schema vorremmo commentare anzitutto i termini che abbiamo impiegato, prima di trarre le conclusioni provvisorie che abbiamo in mente.

Anzitutto vorremmo dire che abbiamo impiegato il termine *osservazione*, invece di altri possibili, perché tale termine ci è apparso più sfumato e quindi meno impegnativo di fronte ad altri che sono abitualmente impiegati; invero per esempio il termine *esperienza* può avere dei significati tecnici filosofici che noi vorremmo non considerare per il momento; il termine *esperimento* è troppo limitativo a nostro parere. Infatti è chiaro che ogni esperimento porta ad una osservazione; ma viceversa possono darsi delle osservazioni che non ammettono esperimenti, almeno nella accezione classica del termine "esperimento", come fenomeno che si può ripetere a volontà, variando le circostanze e le modalità. L'esempio più banale è offerto dai fenomeni astronomici, i quali possono essere osservati ma ovviamente non riprodotti in laboratorio (almeno per ora); ma il caso tipico di questa situazione è offerto dalle scienze dell'uomo, per le quali un *esperimento* nel senso proprio della parola non è pensabile, almeno nelle attuali circostanze storiche e nelle abituali situazioni di costume delle nostre civilizzazioni.

Notiamo in secondo luogo che lo schema di procedimento presentato più sopra si adatta alle scienze più disparate; pensiamo per esempio ad una immaginaria ricerca storica, la quale si trovi di fronte al fatto accertato della fine brusca e rapida di una civiltà; si apre quindi il campo alla emissione di ipotesi; per esempio uno storico può avanzare l'ipotesi che la fine brusca di quella civilizzazione sia dovuta ad una guerra particolarmente rovinosa. Da questa ipotesi si possono allora dedurre delle conseguenze; tra l'altro che la guerra perduta comporterebbe distruzioni degli edifici e dei monumenti, come si presume sia abituale nei conflitti umani. L'ipotesi sarà confrontata con i dati degli scavi e delle osservazioni: se questi scavi confermeranno l'ipotesi essa sarà adottata, almeno provvisoriamente. Se non si troverà traccia di quelle che sono presunte le necessarie conseguenze delle ipotesi avanzate, se ne formuleranno altre: per esempio si potrà supporre che la civilizzazione studiata si reggesse sulla capacità di scavare l'oro e di servirsene per acquistare beni e potere; di conseguenza la fine rapida del periodo di splendore potrebbe essere dovuta per esempio all'esaurimento delle miniere d'oro che erano nelle vicinanze. Tale conseguenza sarà verificata sul terreno, cercando e scavando per costatare se esistono tracce di miniere e prove del fatto che le vene d'oro si siano esaurite, almeno per i mezzi della tecnologia che era posseduta dagli abitanti, e così via.

Dall’analisi di questo esempio, in gran parte immaginario, scende anche la ovvia osservazione che i momenti del procedimento scientifico che abbiamo presentato come distinti non sono necessariamente anche separati di fatto; e che la successione logica che abbiamo cercato di rappresentare non è anche necessariamente sempre la successione con la quale essi si presentano nel tempo. Così per esempio nel caso di quel lungo procedimento con il quale Keplero (1571 – 1630) giunse a formulare le leggi del moto dei pianeti, le osservazioni da cui egli partiva e con le quali confrontava i risultati delle sue deduzioni erano quelle di Tycho Brahe (1546 – 1601), fatte circa mezzo secolo prima.

Importa anche osservare che proprio dall'esempio della fatica di Keplero, da lui descritta talmente lunga e faticosa, come una 'Guerra di Marte' (perché si è trattato della ricerca dell'orbita di Marte), le ipotesi possono riguardare anche soltanto lo schema matematico che rende ragione delle apparenze fenomeniche. Nel caso di Keplero e della 'guerra di Marte', le ipotesi passate in rassegna riguardavano le forme geometriche delle orbite possibili e la posizione del Sole rispetto ad esse; Keplero riferisce di aver prima saggiato l'ipotesi che l'orbita di Marte fosse circolare, con il Sole al centro; poi che fosse ellittica, sempre con il Sole al centro, ed infine che fosse ellittica e che il Sole occupasse uno dei fuochi .

Quale che sia il procedimento che si segue e il tipo di ipotesi che vengono enunciate, resta tuttavia valida l’osservazione che lo scienziato nell'enunciare un’ipotesi intende descrivere le cose così come stanno. In altri termini ritroviamo qui in questa sede quel realismo primitivo, che sta alla base di ogni ricerca scientifica e di ogni faticoso procedimento di costruzione di una teoria scientifica. Questa convinzione potrà essere giudicata primitiva, acritica, ingenua, ma resta, nonostante tutti questi giudizi, reale e fondamentale per la costruzione della teoria; non vogliamo pronunciare qui il giudizio sul fatto che si tratti soltanto di una convinzione che ha un fondamento puramente psicologico, oppure se tale convinzione sia fondata su qualche cosa che è nella natura delle cose. Ci limitiamo a constatare che tale convinzione è la condizione necessaria perché il lavoro scientifico possa avere un inizio ed una giustificazione.

5 – Le osservazioni nel caso delle scienze della natura e nel caso delle scienze dell'uomo.

L'analisi del procedimento tipico con cui si costruisce una spiegazione scientifica dell'osservazione si applica, come abbiamo visto da qualche esempio, ad una vasta gamma di scienze. A questo punto possiamo spingere ulteriormente la nostra analisi cercando di distinguere nelle loro caratteristiche almeno due specie fondamentali di scienze; questa distinzione si basa sulla osservazione che abbiamo già fatto e che mette in evidenza le diverse procedure che possono essere utilizzate per la determinazione dei fatti, cioè per la stesura dei protocolli da cui parte la costruzione di ogni teoria. Invero abbiamo già osservato una cosa che riguarda questo problema, e cioè fondamentalmente il fatto che il metodo sperimentale è applicabile in linea di principio soltanto alle scienze della natura, o in modo più generale, alle scienze che non riguardano l'uomo ed il suo comportamento

Invero si potrebbe dire che soltanto negli oggetti delle scienze della natura si può riscontrare quella disponibilità assoluta alla ripetizione della osservazione cambiando i modi, le circostanze, i tempi in modo da applicare quei criteri delle tabulae presentiae, delle tabulae absentiae e tabulae graduum che costituiscono il codice elementare della scienza sperimentale secondo Francesco Bacone (1561 – 1626).

È questo il fondamento per quella ricerca di intersoggettività, che è considerata il fondamento per la oggettività dell'osservazione, cioè per la possibilità di raggiungere dei protocolli che non dipendono dal singolo osservatore. In verità occorre osservare che anche la ipotetica ripetibilità ad libitum degli esperimenti e delle conseguenti osservazioni è più un desiderio ed un principio teorico, che una circostanza pratica che si verifica effettivamente nella ricerca scientifica. Non ripetiamo ciò che abbiamo detto a proposito delle osservazioni astronomiche, ma anche gli esperimenti di fisica che sono all'avanguardia della scienza richiedono attrezzature particolarissime, ed osservatori e sperimentatori dotati di fantasia e di una abilità particolare e di certe doti che non si trovano dappertutto; si potrebbe addirittura dire che nella fisica avanzata di oggi molto spesso la difficoltà maggiore sta nella progettazione e nella effettuazione degli esperimenti fondamentali per il progresso della teoria.

Invero nel campo della fisica subatomica l'interferenza necessaria tra l'osservatore e la natura pone delle difficoltà, che si superano tuttavia con la costruzione della meccanica quantistica. Invece nel campo delle scienze dell'uomo la osservazione deve necessariamente fare a meno dell'esperimento e ciò per varie ragioni: abbiamo già parlato della interferenza necessaria che - per il carattere specifico dell'uomo - non può non verificarsi nel corso di un esperimento psicologico; invero anche quando l'operatore cerca di nascondere la sua presenza e di non essere percepito dall'osservato, questi avverte quasi sempre di essere in condizioni che non sono 'naturali' e comunque l'esperimento si incide nella sua storia personale in modo che può anche non essere dimenticato e quindi modifica necessariamente la situazione psicologica.

Ma più in generale, si potrebbe dire, l'uomo ha una storia, che ha un andamento irreversibile e quindi molto difficilmente si può presumere - come si fa con la natura - che un eventuale esperimento non lasci alcuna traccia nel fenomeno che si vuole osservare. A questa osservazione si potrebbe obbiettare che, come conseguenza del secondo principio della termodinamica, anche la natura manifesta l’esistenza di un tempo irreversibile e quindi anche per la natura si potrebbe affermare che ogni evento lascia una traccia, sia pur minima, ma incancellabile. Ma pur accettando la validità di questa obbiezione in linea di principio, si potrebbe rispondere che - nonostante tutto - di fatto nelle scienze della natura il concetto di sistema isolato per cui vale la reversibilità del tempo ha una sua validità, sia pure relativa alla teoria che si vuole costruire.

È stato ripetuto infatti che per esempio la meccanica celeste, come era concepita da Newton e nei secoli successivi, almeno fino alla teoria einsteiniana della gravitazione, potrebbe essere costruita cambiando segno al tempo e quindi ha una sua validità senza una “storia”. Ripetiamo che queste argomentazioni hanno un valore relativo e quindi saranno riprese ed inquadrate nella discussione che faremo sul concetto di 'verità' di una teoria scientifica.

6 - L’operazione di misura e i suoi presupposti.

Abbiamo analizzato poco fa (§ 4) il procedimento per la costruzione di una spiegazione scientifica dei fenomeni, procedimento che, a nostro parere, risulta valido nelle scienze della natura e nelle scienze dell'uomo, sia pure con tutte le sfumature che il termine spiegazione può assumere nelle une e nelle altre. Ci vorremmo concentrare per il momento sulle scienze della natura, per cercare di spiegarci la particolare fortuna del linguaggio matematico in questo campo, fortuna che ha fatto parlare di *matematizzazione*, almeno tendenziale, delle scienze della natura.

Vorremmo osservare anzitutto che al momento della osservazione, della raccolta dei protocolli, l’utilizzazione del linguaggio matematico dà un primo vantaggio, che consegue dall’uso di un mezzo di espressione chiaro e sicuro, come quello dell’espressione mediante i numeri. Invero quando si adotta il linguaggio matematico, l’osservazione dà luogo a lettura di strumenti, oppure più particolarmente a misure, ovvero si deve limitare ad un conteggio di eventi favorevoli o contrari. Nel primo caso la lettura di strumenti può dare luogo alla determinazione di uno stato fisico, come avviene quando si legge una temperatura su un termometro; questa lettura viene abitualmente chiamata 'misura' della temperatura, ma noi preferiamo riservare il termine misura ad un procedimento che presuppone la presenza di alcune circostanze accessorie, sulle quali ritorneremo. Infine la operazione di 'conteggio', che viene utilizzata molto spesso in biologia, è il punto di partenza per l'utilizzazione della statistica, e quindi ancora una volta per l'utilizzazione del linguaggio matematico nella fase successiva.

La distinzione tra la semplice lettura di una indicazione su uno strumento e l'operazione di misura implica una distinzione che vale la pena di analizzare un poco. Infatti la questione che riguarda la misura propriamente detta implica la definizione del concetto di *grandezza* (geometrica, fisica, meccanica, ecc.), definizione che porta con sé un'analisi della realtà mediante gli strumenti della matematica. Naturalmente la definizione ha una certa dimensione convenzionale; tuttavia queste convenzioni sono giustificate dall'esistenza di certe proprietà della realtà che sono intuite anzitutto e poi verificate sulla base della rispondenza della realtà alle conclusioni. Invero la possibilità di definire grandezze (geometriche, meccaniche, fisiche) omogenee implica il sussistere di certe circostanze nella classe di enti che si consideri. Le circostanze principali sono le seguenti:

a) L'esistenza di una certa tecnica la quale permetta di stabilire tra due enti della classe una relazione, che viene chiamata genericamente uguaglianza, e che ha le proprietà formali dell'uguaglianza fra numeri: riflessiva, simmetrica e transitiva. Tale tecnica può essere di tipi svariati: per esempio nel caso del peso la tecnica per verificare se sussiste la relazione tra le due grandezze può condurre all'utilizzazione di un determinato strumento, che viene chiamato 'bilancia'.

b) La possibilità di avere un'operazione di composizione, che viene impropriamente chiamata *somma*, la quale permette di associare a due enti dell'insieme un terzo che viene chiamato somma dei due; l'operazione deve possedere le proprietà classiche possedute dall'operazione di somma tra due numeri: commutativa ed associativa. Inoltre, per estrapolazione, si postula l'esistenza di una *grandezza zero* che non dà contributo quando sia sommata con un'altra qualunque. L'operazione di somma, con le proprietà che abbiamo ricordato, permette anche di definire un multiplo di un ente della classe secondo un numero intero qualsivoglia. A questo proposito si ammette anche di solito che sia valida la proposizione che viene abitualmente indicata come *Postulato di Archimede*; secondo questa proposizione, dati due enti è sempre possibile trovare un multiplo dell'uno che superi l'altro.

L'operazione di somma permette di istituire un ordinamento nell'insieme, convenendo di dire che una grandezza è maggiore di un'altra quando si ottiene da questa seconda aggiungendone un'altra. È la mancanza di un'operazione cosiffatta che per esempio ci ha fatto dire che la lettura su un termometro non costituisce, a parlare propriamente, una misura.

Si suppone infine che si possa parlare di un *sotto - multiplo* di una grandezza qualsivoglia. Questa supposizione, che ci appare molto naturale dalla nostra esperienza quotidiana, ma che non discende affatto dalla definizione di grandezza, permette di dare un senso all'operazione di misura. Questa operazione sostanzialmente permette di descrivere la natura con caratteri matematici, come voleva Galileo. Ricordiamo in breve che per misurare una grandezza si stabilisce anzitutto una grandezza campione, che viene chiamata *unità di misura*; in base alle proprietà ammesse della grandezza, si può far corrispondere ad ogni grandezza della classe un numero, che viene chiamato misura della grandezza nell'unità scelta. La cosa che più ci interessa notare qui è il fatto che esiste una specie di parallelismo tra le operazioni concrete che si eseguiscono sulle grandezze e le operazioni che si eseguiscono sui numeri che le rappresentano: per esempio quando si sia scelta una unità di misura, non soltanto ad ogni grandezza corrisponde un numero, che è la sua misura, ma alla somma di due grandezze corrisponde come misura il numero che è somma delle due misure delle grandezze su cui abbiamo operato. Ne consegue quindi che la matematica, quando sia scelta per *cifrare* le grandezze con la tecnica convenzionale che abbiamo ricordato, ci fornisce delle operazioni che sono parallele a quelle che operiamo sulla realtà.

Ma è da ricordare che, anche quando questa possibilità non esiste, la rappresentazione degli enti della natura mediante il linguaggio matematico permette di conoscere delle proprietà della realtà, proprietà che vengono dedotte dalle proprietà del linguaggio scelto. Per esempio abbiamo detto che la temperatura non va considerata, a rigore, come una grandezza, nel senso che abbiamo spiegato, perché non ha senso fisico l'operazione di fare la *somma* di due temperature; pertanto la lettura che facciamo su un termometro costituisce soltanto una tecnica per associare ad ogni stato fisico un numero; ma questo numero non è privo di significato. Invero se due corpi hanno la stessa temperatura, tra loro non vi è scambio di calore quando essi vengono posti a contatto; quando invece essi hanno temperature diverse, il calore passa spontaneamente dal corpo a cui corrisponde la temperatura maggiore a quello a cui corrisponde la temperatura minore. Pertanto, come abbiamo detto, la strada che abbiamo scelto per rappresentare lo stato fisico ci fornisce delle informazioni, che discendono dalla proprietà del linguaggio dei numeri che abbiamo scelto.

7- Le conseguenze dell'utilizzazione della matematica nella descrizione della natura.

Il breve cenno che abbiamo fatto poco fa a proposito dell'operazione che conduce ad associare ad un ente della natura fisica un numero, e della corrispondenza che intercede tra natura rappresentata e gli enti che la rappresentano, ci conduce a capire più da vicino qualcuna delle ragioni che giustificano il fatto che abbiamo ricordato, che la scienza della natura sia passata dalla tutela della metafisica a quella della matematica.

Consideriamo anzitutto il primo stadio della costruzione della conoscenza spiegata, cioè quello della osservazione. A questo stadio l'adozione del linguaggio matematico per la stesura dei protocolli permette di evitare le ambiguità e le incertezze che si avrebbero se si adottassero le parole del linguaggio comune. Invero è noto che ogni linguaggio naturale presenta una certa ridondanza, cioè trasmette più informazioni materiali di quanto sia strettamente necessario. Tutti noi sappiamo che il linguaggio telegrafico, pur essendo 'brutto' e scorretto grammaticalmente, pure trasmette delle informazioni essenziali con meno parole di quante si adotterebbero se si usasse il linguaggio letterario. Ma (ciò che è più fastidioso) i termini del linguaggio naturale e comune hanno spesso vari sensi, ognuno dei quali è precisato dal contesto (quando sia possibile): nelle due frasi: "Le azioni della FIAT sono buone" e "Le azioni dell'uomo onesto sono buone", ovviamente la parola "azioni" ha dei significati del tutto diversi. La determinazione del significato può essere fatta soltanto prendendo conoscenza del contesto in cui i termini sono inseriti. Ciò rende molto scomoda la descrizione di un fenomeno naturale con il linguaggio comune; e d'altra parte questa descrizione è molto spesso puramente qualitativa; e ciò è tanto più importante in quanto è confermato dalla pratica costante delle scienze che non hanno adottato il linguaggio matematico, ma che, come per esempio il diritto e la medicina, cercano il più che possono di rendere 'tecnico' il loro linguaggio, precisando il significato dei termini che esse prendono dal linguaggio comune, oppure coniando dei termini nuovi da radici greche o latine, come fa la medicina.

Invece la descrizione dei fenomeni della natura che si ottiene con le parole del linguaggio matematico permette di dare delle descrizioni che sono ottenute senza necessità di ricorrere al contesto e con un significato assolutamente univoco, quando beninteso si conoscano le convenzioni con cui le parole sono state ottenute. Pertanto la utilizzazione del linguaggio matematico nella stesura dei protocolli costituisce un primo passo verso quella intersoggettività di cui abbiamo parlato, che viene considerata, come abbiamo detto (vedere sopra § 5) una prima garanzia della certezza nelle osservazioni.

Ma questa prima giustificazione della adozione del linguaggio matematico nel primo stadio della costruzione di una spiegazione della realtà, porta di conseguenza anche altre giustificazioni, che conseguono dalla prima scelta che viene fatta. Invero quando si sia adottato il linguaggio della matematica, il secondo stadio della operazione di costruzione della spiegazione della realtà, cioè la emissione di ipotesi e la loro formulazione, acquista un carattere che è quasi obbligato. Invero la formulazione dell'ipotesi nel linguaggio matematico conduce alla scrittura di relazioni matematiche, che legano i numeri di cui ci siamo serviti per stendere i protocolli. È del tutto ovvio che nel linguaggio matematico non esiste il termine “spiegazione”, ma ciò che ci interessa qui non è ciò che si riesce a scrivere con tale linguaggio, ma ciò che sta sotto il lavoro dello scienziato quando scrive quelle relazioni. Come abbiamo già detto, anche la scrittura di certe relazioni tra numeri costituisce una forma di spiegazione della realtà che ci appare attraverso i fenomeni che abbiamo osservato. Ovviamente si tratta di una spiegazione del tutto diversa da quella che viene data facendo appello ai concetti della metafisica e quindi per esempio al concetto di causa; ma la necessità logica che, in linea di principio almeno, dovrebbe legare le misure che entrano nella spiegazione matematica traduce in questi termini quella necessità intellegibile, legame tra causa ed effetto, che è l'ideale al quale tende la conoscenza della natura, attraverso la conoscenza dell’essenza dell'essere conosciuto.

Pertanto si potrebbe dire che la scrittura di una legge matematica, che lega tra loro certe misure delle grandezze coinvolte in un certo fenomeno, o (più in generale) la scrittura di un certo insieme di relazioni matematiche, che vorrebbero dare un 'ritratto' della realtà fisica, è un tentativo di spiegazione, o meglio una spiegazione possibile con il linguaggio della matematica. Ripetiamo che ovviamente nel linguaggio della matematica non trova cittadinanza l'insieme dei concetti della metafisica, ma il mettere in rilievo la costanza di certe relazioni è un modo di mettere in evidenza la connessione necessaria che lega la essenza dell'essere alle sue manifestazioni fenomeniche.

Dall'impiego della matematica nei due primi momenti della spiegazione razionale della realtà consegue anche una caratteristica tipica del terzo momento, cioè quello della deduzione. È chiaro che se la stesura dei protocolli è a livello qualitativo ed utilizza il linguaggio comune, con i limiti di cui abbiamo detto poco fa, la deduzione può essere fatta soltanto con i metodi sillogistici della logica classica. Ritorneremo in modo esplicito sul problema della logica in seguito; qui ci limitiamo ad osservare una caratteristica della logica classica, che utilizzava il linguaggio comune: la deduzione sillogistica richiede, in modo quasi necessario, che si faccia l'analisi dei termini utilizzati, cioè implica in modo quasi necessario che la deduzione sia fatta in modo che potremmo chiamare 'contenutistico', cioè occorre che si abbia riguardo al significato; così avviene per esempio quando si vuole evitare il paralogismo che i classici chiamavano 'vulpecula', perché utilizzava in due sensi diversi una stessa parola, e quindi si presenta un ragionamento che viola la regola classica dei tre soli termini nel sillogismo.

Orbene quando si sia scelta la strada di utilizzare il linguaggio della matematica, la deduzione diventa puramente formale, ed in particolare non dipende dal significato dei simboli che si utilizzano, ma soltanto dalle regole che ne stabiliscono la manovra. Si potrebbe dire, con altre parole, che la deduzione viene ridotta ad un calcolo; questa parola ha un significato che conosciamo dal linguaggio comune nel caso in cui i simboli utilizzati siano delle cifre che rappresentano numeri; ha un significato analogo nel caso della logica del primo ordine, che consiste semplicemente nell'applicare certe regole per la manovra dei simboli. Avviene qualche cosa di analogo a ciò che si verifica quando operiamo su certi numeri, con regole dell'aritmetica che abbiamo memorizzato ed applichiamo senza saperle bene giustificare, ma sul risultato delle quali abbiamo assoluta fiducia. La 'guerra di Marte' di Keplero, di cui abbiamo già detto, costituisce un esempio abbastanza tipico di questo modo di procedere. In questo caso le ipotesi emesse riguardavano la forma dell'orbita del pianeta; da ciascuna di queste ipotesi con i calcoli si deducevano le opportune conseguenze, che si confrontavano con la realtà, in questo caso le osservazioni di Tycho Brahe già esistenti. Ma la deduzione consisteva principalmente in calcoli faticosi e lunghissimi, ma certamente eseguiti in forza delle pure leggi formali dell'aritmetica.

Richiamando lo schema di carattere ciclico di cui abbiamo detto, risultati delle deduzioni, effettuate con calcoli, vengono confrontati con nuove misure, tratte dalla osservazione della realtà. A questo punto si manifesta il carattere peculiare della procedura di cui abbiamo detto: invero anche la verifica della rispondenza dei risultati dei calcoli alla realtà che si osserva non è quasi mai perfetta. Esistono dei margini di errore nella misura di cui si parte, così come esistono dei margini inevitabili di errore nel *confronto* sulla validità delle deduzioni. Il giudizio sulla validità della rispondenza delle deduzioni con la realtà è sempre soggettivo e relativo. Soggettivo nel senso che il ricercatore che ha formulato le ipotesi sotto forma di sistema di relazioni matematiche giudica sulla rispondenza dei risultati ai dati della realtà; relativo nel senso che la conclusione sulla validità della rispondenza o meno delle deduzioni alla realtà è anche tratta in relazione alla realtà che si vuole rappresentare ed alla profondità alla quale si vuole giungere con le rappresentazioni matematiche. È chiaro per esempio, che le leggi di Keplero non sono valide in senso assoluto, perché nessuno dei pianeti, di fatto, descrive un'orbita ellittica attorno al Sole. Vi sono delle discrepanze, che sono spiegate in parte almeno con la presenza di altri pianeti, che esercitano azioni gravitazionali ciascuno su tutti gli altri. La discussione sulla validità di una certa rappresentazione non va fatta in assoluto, con il richiamo ad una certa realtà che si vuole rappresentare matematicamente per spiegarla con questo mezzo, ma in relazione a certi tipi di conclusioni che si vogliono trarre dall'insieme delle rappresentazioni.

Invero la pretesa che le leggi matematiche che noi scriviamo rappresentino tutta la realtà condurrebbe da una parte a concludere che non esistono leggi vere, dall'altra ad una impostazione della scienza che si potrebbe qualificare di tipo euclideo-newtoniano; nel senso che proprio in Euclide per quanto riguarda la geometria, ed in Newton per quanto riguarda la meccanica e la gravitazione, troviamo l'esposizione rigorosa che parte da certi principi che non vengono più posti in discussione per trarre tutte le possibili conseguenze con procedimento puramente deduttivo.

Ma la realtà della ricerca scientifica è ben più complicata e si potrebbe dire che proprio le discrepanze tra le conclusioni e le osservazioni provocano l'avanzamento della scienza, quando diventano non più tollerabili nell'ambito di una certa informazione che si vuole trarre dalla legge matematica. Così per esempio il sistema periodico degli elementi, stilato sulla scorta della geniale intuizione di Mendeleieff, faceva pensare che ogni elemento chimico fosse composto con un determinato numero di particelle elementari di questo elemento primordiale; e ciò perché le leggi della fisica, ad un livello di prima approssimazione, portavano che i pesi atomici degli elementi chimici conosciuti a quel tempo fossero tutti rappresentati da numeri interi. Ulteriori misure ed osservazioni più precise portarono alla constatazione che i pesi atomici rappresentati da numeri interi sono una minoranza, e quindi portarono alla necessità di supporre la esistenza di isotopi; un nuovo lineamento della realtà veniva così ad aggiungersi a quelli che già si conoscevano.

In modo analogo, per quanto riguarda la meccanica celeste, tenendo conto della presenza di tutti i pianeti del sistema solare si riesce a spiegare quasi tutti gli scostamenti dei pianeti dalle loro orbite teoriche; ma per Mercurio resta uno scostamento residuo di 32 secondi di arco per secolo, che viene spiegato soltanto con la teoria gravitazionale che si formula nell'ambito della relatività generale. Pertanto possiamo ripetere che la discrepanza tra i risultati dei calcoli e la verifica sperimentale non costituisce necessariamente un disastro né una crisi radicale nella conoscenza della natura e dell'uomo; essa invece dà luogo molto spesso ad una crisi di crescenza, anche se provoca talvolta l'abbandono di determinati "modelli' della realtà, che saranno sostituiti da altri destinati a loro volta ad essere messi in crisi da ulteriori scoperte di fatti e da ulteriori raffinamenti delle verifiche della discrepanza tra le deduzioni e i risultati sperimentali.

Tutto ciò richiede una nuova visione del concetto di "verità" di una teoria fisica; richiede l'abbandono di una concezione di visione metafisica data alle teorie fisiche; ma non vuole assolutamente significare che il cammino della scienza procede oggi con la rinuncia alla spiegazione dei fatti. La natura speciale del linguaggio scelto porta alla necessità di ritornare ciclicamente sulla osservazione, per attingerne conferme oppure procedimenti di 'falsificazioni' di una teoria. Ma non inficia affatto la natura del tipo di conoscenza che si sceglie, conoscenza che sempre vuole essere a livello scientifico, cioè vuole attingere alla spiegazione dei fatti sperimentali. Spiegazione che non è soltanto una descrizione esteriore di certe relazioni, un puro sistema di relazioni formali, ma una ricerca sempre di una spiegazione.

Vale la pena di fare un'ulteriore osservazione a proposito di ciò che stiamo dicendo: occorre osservare che l'impostazione che abbiamo descritta suppone molto spesso, quasi sempre si potrebbe dire, una valutazione preventiva di una specie di gerarchia dei fenomeni che sono considerati come 'importanti' dal punto di vista quantitativo. Per esempio la differenza tra la spiegazione dei fenomeni della caduta dei gravi che viene data da Galileo e quella che veniva data dalla scienza dell'epoca non sta soltanto nell'aderenza alla realtà: infatti il Simplicio del *Dialogo dei due massimi sistemi* (1532) si appella alla "sensata esperientia" per riaffermare che il ciottolo cade più rapidamente della piuma. Il che è vero anche oggi, ovviamente; ma la genialità di Galileo sta anche nell'intuizione del fatto che esiste un fenomeno che si potrebbe chiamare principale, oppure anche 'fondamentale', che è quello della caduta nei gravi nel vuoto e che le particolarità rilevate nella caduta dei vari corpi nell'aria sono dovute all'esistenza di fenomeni che si potrebbero chiamare perturbatori del fenomeno fondamentale.

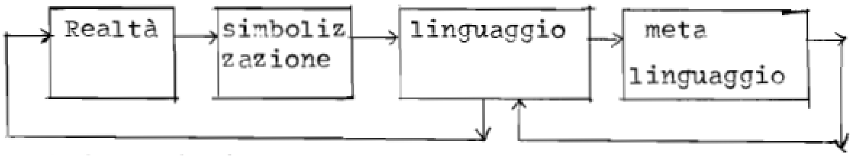
Abbiamo già incontrato questo modo di vedere nel caso delle leggi del moto dei pianeti; si potrebbe dire che questo atteggiamento è presente ogni volta che si cerca di costruire una teoria fisica; ovviamente ciò significa che lo scienziato costruisce dentro di sé una gerarchia, come si è detto, di effetti, gerarchia che si manifesta attraverso la grandezza quantitativa degli effetti di certe cause. Ovviamente quando si impostano le cose in questo modo la sola gerarchia tra le cause è data dalla grandezza quantitativa degli effetti, e non da una gerarchia di presunta 'dignità ontologica' oppure da altri criteri ispirati dalla metafisica. Questo atteggiamento potrebbe essere giudicato come una vittoria della superficialità della spiegazione cosiddetta *scientifica* secondo la concezione moderna del termine. Ma ripetiamo ancora una volta che questo atteggiamento non costituisce rinuncia alla spiegazione della realtà come ci appare dall'osservazione.

A questo punto si pone in modo quasi necessario il problema dell'analisi del linguaggio che la scienza utilizza per le stesure dei protocolli, per la formulazione delle ipotesi e per il procedimento delle deduzioni. Ciò faremo con una digressione che ci porterà ad analizzare la matematica come ci si presenta oggi, allo scopo di rendersi conto non soltanto dell'influenza che la matematica ha sulla mentalità scientifica odierna, ma anche della reazione che la scienza della natura ha avuto ed ha anche oggi sulla matematica, col porre dei problemi concreti, col provocare progressi e far nascere nuovi rami di questa vecchia scienza.

IV L'EVOLUZIONE DELLA MATEMATICA DALL'ETÀ CLASSICA FINO AD OGGI.

1 - Linguaggio e simbolizzazione.

Ciò che abbiamo detto fin qui porta all'opportunità di analizzare la matematica, che dal Rinascimento ad oggi è diventata, in modo via via più imponente, il linguaggio della scienza e il quadro ideale della metodologia scientifica. La cosa è tanto più interessante perché non soltanto la matematica, nella sua qualità di linguaggio e di quadro ideale della scienza, ha una funzione in certo senso direttiva su questa, ma anche perché i contenuti scientifici hanno operato una specie di reazione sulla matematica, ponendo dei problemi di linguaggio, dando origine anche a dei problemi metalinguistici e provocando la nascita di nuovi rami della matematica. In forma schematica e non tecnica si potrebbe dire che l'utilizzazione della matematica nella conoscenza della natura dà luogo ad un processo che potrebbe essere simbolizzato nel diagramma seguente:



Abbiamo distinto il momento della simbolizzazione da quello del linguaggio come il momento del generico da quello dello specifico. Per spiegare con esempi rudimentali ciò che vorremmo dire potremmo prendere in considerazione degli episodi elementari. Per esempio, consideriamo il pastore analfabeta che non conosce l'aritmetica, tuttavia vuole controllare che tutte le sue pecore ritornino all'ovile alla sera; pertanto egli mette un ciottolo in un mucchio ad ogni pecora che esce al mattino dall'ovile e toglie un ciottolo dal mucchio alla sera per ogni pecora che rientra. Si tratta di una simbolizzazione materiale e rudimentale, che tuttavia ha una sua capacità di dare delle informazioni e di conferire una conoscenza, perché il pastore è in grado di stabilire che qualche pecora non è rientrata se qualche sasso rimane nel mucchio.

Vorremmo chiamare linguaggio una simbolizzazione che è dotata di una "grammatica", di modo che i simboli possano essere maneggiati con loro leggi proprie, così da permettere non soltanto di dare informazioni ma anche di fare delle deduzioni. Per esempio, il piccolo commerciante che segna con carta e matita ogni operazione mediante i simboli abituali (adottati comunemente per rappresentare i numeri) e che alla sera somma tutti i numeri segnati via via durante il giorno, ovviamente utilizza la "grammatica" dei simboli adottati, per fare un'operazione che lo conduce sostanzialmente alla sua conclusione, cioè alla conoscenza della somma delle entrate del giorno. Appare chiaro quindi che dal linguaggio si può ritornare alla realtà rappresentata, confrontando le deduzioni con ciò che si può osservare e progettando, se del caso, altre osservazioni. Ma quando si è costruito un linguaggio, si può anche fare un passo ulteriore e fare oggetto di studio il linguaggio stesso; si viene così a costruire un metalinguaggio, il quale studia le proprietà e le leggi del linguaggio.

Eventualmente questo studio può portare alla modificazione del linguaggio, e può avere ulteriori influenze sulla conoscenza della realtà che interessa lo scienziato; non, ovviamente, perché le leggi del linguaggio siano le stesse della realtà materiale studiata ed osservata, ma eventualmente perché il metalinguaggio può dare luogo alla necessità di ulteriori informazioni; con questa operazione si può essere portati ad arricchire il linguaggio e quindi aumentare la sua capacità di trarre delle deduzioni dalle osservazioni e, alla fine, di conoscere la realtà. Appare invero abbastanza evidente il fatto che ogni arricchimento del quadro delle relazioni conosciute possa portare anche ad un arricchimento delle nostre conoscenze sulla realtà. Da ciò che precede si potrebbe trarre la conseguenza che la parte più interessante del discorso che seguirà sarà data dalla analisi dello sviluppo della matematica considerata come il linguaggio di un certo tipo di scienza. A questo proposito vorremmo avanzare qualche osservazione prima di iniziare un breve riepilogo storico dello sviluppo della matematica.

La prima osservazione riguarda l'obiezione che è stata già sfiorata, a proposito della limitatezza del campo al quale la matematica può essere applicata; invero se si considera questa scienza nella visione classica, il suo oggetto dovrebbe essere soltanto quello che classicamente si chiamava lo 'ens quantum'; e pertanto resterebbero escluse dalle analisi che stiamo per fare moltissime scienze il cui oggetto non è o si presume non essere quantificabile. Abbiamo già detto, e qui ripetiamo, che oggi la matematica viene considerata da un punto di vista molto diverso e quindi che oggi si considera come oggetto della matematica anche qualunque procedimento razionale che possa essere espresso mediante simboli che sono suscettibili di una grammatica formale; ritorneremo più volte nel seguito su questa tesi, che comunque riportiamo qui per rispondere in anticipo a qualche eventuale obbiezione che mirasse a svuotare di significato la nostra analisi con la critica suddetta.

La seconda osservazione riguarda il fatto che l'analisi della matematica ci porterà quasi necessariamente anche ad analizzare il linguaggio matematico, cioè alle questioni epistemologiche che sono state poste dallo sviluppo recente della matematica e che la matematica classica non aveva incontrato.

2 – Algebrizzazione.

Tutti i trattati di storia della matematica fanno cenno all'esistenza di una matematica presso i popoli antichi. Perfino la Bibbia dà delle nozioni di matematica (I Re VII, 23 II Par. IV, 2) laddove accenna al fatto che il grande bacino costruito nell'atrio del tempio di Salomone aveva un diametro di IO cubiti ed era circondato da un cordone lungo 30 cubiti. Analogamente si trovano tracce di nozioni di matematica presso gli Assiro-Babilonesi e presso gli Egiziani. Va detto tuttavia che tutti i documenti che noi possediamo testimoniano sì di nozioni matematiche ma trasmettono queste nozioni sempre con riferimento a problemi pratici particolari e senza giustificarle razionalmente, cioè senza dimostrazione. È vero che alcuni problemi che si trovano risolti dalla matematica antica, se fossero posti in generale, richiederebbero per la loro soluzione delle nozioni abbastanza elevate. Ma vi sono degli storici della matematica (per esempio Ettore Bortolotti) che hanno fatto vedere come i problemi particolari e concreti possono essere risolti in modo elementare, con dei tentativi ragionevoli; pertanto non è necessaria la conoscenza di strumenti matematici elevati, che sono necessari per la risoluzione del problema in generale, ma non per la risposta ai singoli problemi riportati. Si può dunque ritenere abbastanza attendibile l'opinione di chi pensi che la matematica a livello scientifico si trovi per la prima volta nella storia presso i Greci; ed il livello scientifico è garantito dall'astrattezza e generalità della trattazione, e dal rigore della giustificazione razionale dei risultati.

Il primo trattato scientifico che si conosca (scientifico nel senso precisato or ora) è il trattato degli *Elementi* di Euclide. Per testimonianza degli storici greci Euclide raccoglie delle nozioni che sono dovute a matematici anteriori a lui; pertanto gli *Elementi* sono la testimonianza di una civiltà scientifica matura, che non è neppure confrontabile con le altre civilizzazioni contemporanee. Negli *Elementi* troviamo l'esposizione tipica che farà testo nei secoli e secoli successivi: la enunciazione dei termini con la loro definizione, l'enunciazione delle proposizioni primitive (assiomi e postulati) date esplicitamente senza dimostrazione, e la dimostrazione delle proposizioni successive. È da osservarsi che la concezione della matematica che Euclide aveva, e che ha trasmesso alle generazioni successive, era quella di una scienza che è qualificata dai suoi contenuti, dal suo oggetto. Le proposizioni di geometria che egli enuncia senza dimostrazione (i celebri postulati) sono stati considerati come verità 'evidenti' fino al secolo XIX. Si potrebbe addirittura dire che quando si cambiò il modo di considerarli, cambiò anche la concezione della matematica. Ritorneremo spesso in seguito su questo argomento; che formerà oggetto di varie nostre considerazioni. Ci limitiamo qui ad osservare anche che nell'opera di Euclide la geometria aveva una notevole preponderanza in confronto all'aritmetica. Troviamo bensì enunciato in Euclide il celebre teorema che afferma essere i numeri primi in numero infinito, ed anche i teoremi che sono il fondamento dell'aritmetica elementare che si insegna anche oggi nelle scuole, ma la mole del contenuto geometrico è certamente molto imponente.

Non cercheremo qui di spiegare questo fenomeno, ma vorremmo soltanto osservare che le convenzioni che i Greci utilizzavano per rappresentare i numeri interi e frazionari erano abbastanza poco razionali, e scomode per eseguire le operazioni. È vero che il genio di Archimede seppe superare queste difficoltà e risolvere dei problemi che avevano lasciato impotenti i suoi predecessori, ma in generale si può osservare che probabilmente la mancanza di convenzioni comode e spedite per rappresentare i numeri è una delle cause per cui i risultati matematici di algebra che si trovano presso i greci sono dimostrati ed enunciati quasi sempre in forma geometrica.

In quest'ordine di idee si potrebbe affermare che una svolta storica per la matematica si ebbe nel secolo XIII, quando Leonardo Pisano detto il Fibonacci importò nell'occidente le convenzioni di rappresentazione dei numeri interi che egli aveva imparato nei suoi viaggi in Oriente e che sono quelle che ancora oggi tutto il mondo civile adotta. A proposito di queste convenzioni di rappresentazione ci limitiamo ad osservare che esse offrono due grandissimi vantaggi: anzitutto la possibilità di rappresentare in forma simbolica (non soltanto con parole del linguaggio comune) dei numeri comunque grandi; in secondo luogo che esse permettono di avere delle regole comode e spedite per operare sui numeri. In altre parole l'alfabeto e la grammatica di questa lingua sono molto semplici e pratici.

Il fatto che queste convenzioni si siano diffuse rapidamente e che esse siano adottate ancora oggi da tutto il mondo civile (come abbiamo detto) dimostra che la fortuna delle idee è spesso legata intimamente alla loro espressione; ritorneremo su questo argomento a proposito delle notazioni di logica simbolica; per ora ci limitiamo ad osservare che il progresso nelle conoscenze matematiche fu rapidissimo dopo la introduzione in Occidente delle convenzioni arabe per rappresentare i numeri.

Non ci interessa seguire l'evoluzione storica, che portò alla fondazione dell'algebra ed al suo sviluppo; certo è che all'epoca di Cartesio troviamo che la posizione delle due branche della matematica, quella del continuo e quella del discreto, non è più la stessa che si aveva con Euclide. Non ci addentriamo nell'analisi storica della questione di priorità che riguarda la scoperta della geometria analitica; sappiamo bene che alcuni attribuiscono a Renato Cartesio (1596 – 1650) ed altri a Pierre de Fermat (1601 – 1665) la gloria dell'invenzione. Da un certo punto di vista il fatto che l'invenzione sia stata fatta da due matematici diversi, e all'insaputa l'uno dell'altro, conferma il fatto che tale invenzione era per così dire nell'aria, era in certo modo frutto della maturazione dei tempi, oltre che beninteso del genio degli inventori.

Si potrebbe dire che in Cartesio si trova ripetuto quel programma metodologico che Galileo aveva enunciato nel passo che abbiamo citato (III,3). Invero in Cartesio l'algebra diventa non soltanto la lingua che fornisce i caratteri nei quali si scrive la geometria, ma addirittura il metodo con il quale i problemi geometrici vengono risolti. Ricordiamo infatti che in Euclide le dimostrazioni sono fatte col metodo sillogistico e i problemi sono risolti con un procedimento che fa perno sulla immaginazione e sulla inventiva. Cartesio sostanzialmente rappresenta ogni punto del piano con due numeri (le coordinate cartesiane), traduce le relazioni geometriche in relazioni tra le coordinate dei punti e quindi traduce ogni problema geometrico in un problema di algebra; questa dottrina fornisce i meccanismi che permettono di risolvere ogni problema geometrico, e pertanto Cartesio è ben conscio di istituire un nuovo metodo, e lo dice esplicitamente nella sua opera. Si potrebbe dire che troviamo qui realizzata la circostanza di cui parlavamo a proposito della scienza, nel caso particolare della geometria: la matematica fornisce i mezzi per tradurre lo stato delle cose in formule, per dedurre le conseguenze e per risolvere anche i problemi che eventualmente si presentassero. Si potrebbe dire che la scienza posteriore, ed in particolare la fisica, non ha fatto altro che estendere questo metodo a campi sempre più vasti e importanti della conoscenza umana. Come abbiamo detto, questa invenzione di Cartesio in certo senso appoggiava la concezione cartesiana della materia intesa essenzialmente come ente esteso. Ne conseguiva che la geometria diventava una delle dottrine principali non soltanto per la matematica ma anche per tutte le scienze della natura.

Il successo di una concezione cosiffatta è forse anche spiegabile con la osservazione che abbiamo fatto (III; 2), quando abbiamo detto che, anche a proposito delle classificazione tomistica delle scienze, la matematica risolve le proprie conoscenze sul piano della fantasia; e notiamo che il piano della fantasia è spesso anche più accattivante e sembra più facile del piano della pura ragione. Il che spiega anche il successo di tutta una certa modellistica atomica e le crisi che si sono verificate quando tanti modelli geometrici spaziali si sono dimostrati insufficienti o addirittura contraddittori per spiegare i fatti sperimentali. Nello spirito dell’analisi che abbiamo fatto, osserviamo qui che l’applicazione dell'algebra alla geometria ha posto alla matematica certi problemi che la matematica antica non aveva conosciuto; il problema di rappresentare il continuo geometrico sarà risolto soltanto nel secolo XIX con una opportuna assiomatizzazione; la intuizione della continuità della materia porterà tuttavia molto presto alla invenzione fondamentale del calcolo infinitesimale. Si noti che qui usiamo il termine *intuizione* non nel senso tecnico preciso con cui il tomismo lo aveva adoperato per indicare la conoscenza intellettuale dei primi principi evidenti all'intelletto, ma nel senso in cui i moderni lo usano, per indicare una conoscenza che appare chiara, perché richiama a cose che si possono facilmente immaginare, come le relazioni della geometria.

Questa accezione del termine è proprio quella che ci interessa qui, perché la materia ci appare come continua e priva di lacune soltanto ad una osservazione superficiale e comunque fatta con i nostri sensi. Questa percezione viene poi elaborata dalla fantasia a livello geometrico e porta ad una specie di *evidenza* che non è certamente al livello dell'evidenza intellettuale ma che in compenso, facendo intervenire anche la fantasia, è quella che ha molto successo per la scienza di oggi, che utilizza in modo frequente la modellistica geometrica. Si potrebbe dire che proprio da questa intuizione della continuità è nato lo stimolo che ha condotto all'invenzione del calcolo infinitesimale, da parte di I. Newton (1642 – 1727) e di G. W. Leibniz (1646 – 1716).

Questa invenzione trova i suoi precedenti nell'opera di Galileo (1564 – 1642), di Bonaventura Cavalieri (1598 – 1674) e di Luca Valerio (1553 – 1618). Ma le origini più remote di questo insieme di tecniche possono essere trovate nell'opera di Archimede. Effettivamente in questo matematico noi troviamo la prima intuizione della continuità delle grandezze geometriche e la ricerca di procedimenti che fanno intervenire delle grandezze comunque piccole; questi metodi vengono chiamati *metodi di exaustione* e rappresentano sostanzialmente delle anticipazioni su quanto verrà fatto dai grandi del secolo XVII.

Ciò che si trova in più nell'epoca di Newton e di Leibniz non è tanto l'intuizione del continuo, ma la ricerca di simboli, di elementi di linguaggio e, soprattutto in Leibniz, la ricerca di un procedimento di calcolo per trarre le deduzioni possibili dalle intuizioni geometriche o fisiche. Anche in questo caso quindi ritroviamo il fatto che abbiamo già osservato e che osserveremo molte volte in seguito; il fatto cioè che lo sviluppo delle idee è spesso condizionato dall'adozione di un simbolo opportuno per esprimere le idee stesse. Una delle ragioni, a nostro parere, sta appunto nel fatto che la deduzione tende a diventare meccanica fino a trasformarsi in calcolo; e ciò è richiesto da quelle esigenze di obiettività di cui abbiamo già detto e dal rigore del procedimento, che è garantito dalla meccanicità della deduzione.

In questo ordine di idee perdono di importanza le discussioni sull'infinitamente piccolo e sull'infinitamente grande che si incontrano così di frequente presso i filosofi dei secoli scorsi che volevano ricercare la cosiddetta 'metafisica' dal calcolo infinitesimale. Effettivamente la dimostrazione rigorosa di tanti risultati intuiti dai classici del calcolo infinitesimale è stata ottenuta soltanto nel secolo XIX; ciò non toglie che le intuizioni dei fondatori del calcolo infinitesimale abbiamo potuto dare alla matematica in particolare ed alla scienza in generale uno strumento unico come potenza di deduzione e di invenzione.

Tutto ciò è stato ottenuto in certo modo paradossalmente per l'imperfezione dei mezzi di osservazione; oggi infatti sappiamo che la materia non è continua come una prima ispezione a livello dei nostri sensi ci porterebbe a pensare e ad immaginare. Pertanto oggi ci troviamo nella situazione paradossalmente simmetrica di quella che valeva nella scienza dei secoli XVII, XVIII. In quei tempi la materia era considerata come continua e quindi anche l'energia, in particolare il calore, era pensata come una specie di fluido sottilissimo (così la concepiva J. Fourier, nella sua costruzione della teoria matematica del calore). Pertanto le misure che si davano delle grandezze fisiche, misure necessariamente approssimate con numeri razionali, erano considerate come delle approssimazioni, inevitabili, ma sempre imperfette e sempre perfezionabili. In altre parole lo schema del continuo era considerato come lo schema *vero* della realtà fisica e geometrica; e lo schema della commensurabilità e quindi della misura con numeri razionali era considerato in certo modo come uno schema di approssimazione.

Oggi invece siamo ben coscienti che lo schema migliore per rendere le proprietà della materia e dell'energia è quello granulare. Ne consegue che, a priori e in teoria, le misure vere potrebbero essere date da numeri interi; senonché tali numeri sono sempre talmente grossi per le misure alla scala umana che lo schema del continuo serve di comoda approssimazione. Avviene in certo modo ciò che si ha nella matematica finanziaria, nella quale esiste un 'atomo' per la grandezza fondamentale, per esempio la lira; ma è comodo per molti sviluppi utilizzare il tempo come variabile continua e la moneta pure come una quantità continua; e ciò per sfruttare gli strumenti della analisi matematica e le comode simbologie della lingua geometrizzata che dominano questa dottrina. Si potrebbe quindi dire, a mo' di conclusione, che il calcolo infinitesimale ha avuto una specie di evoluzione con chiarificazione ed espulsione delle scorie metafisiche o metafisicizzanti che l'avevano accompagnato dall'inizio.

Ciò non significa che tutti i problemi logici siano stati risolti, come vedremo, ma semplicemente che essi sono stati posti nella giusta luce. Ciò ha portato anche ad una nuova concezione della scienza della natura che si avvale della matematica direttamente come linguaggio (come per esempio la fisica) oppure della scienza della natura in generale che tende sempre più ad avvicinarsi all''ideale posto dalla matematica col metodo assiomatico. Per avvicinarci alla comprensione di questo metodo faremo una piccola diversione che riguarda la geometria; questa dottrina infatti ha in certo modo catalizzato la crisi evolutiva della matematica ed ha presentato in certo modo il modello esemplare delle scienze della natura modernamente intese.

3 - Geometrie non euclidee.

Abbiamo già detto che il primo trattato di scienza rigorosamente intesa è costituito dagli *Elementi* di Euclide. Abbiamo anche già detto che in quest'opera, frutto di una civiltà scientifica già matura, troviamo una esposizione scientifica modello per secoli nel seguito, che parte dalla enunciazione degli assiomi e dei postulati e poi prosegue con la dimostrazione dei teoremi. Si potrebbe dire, utilizzando un modo di esprimersi abbastanza comodo ed abituale, che si va dal noto al meno noto ed all'ignoto. Tuttavia una analisi un poco più attenta dell'opera euclidea ci porta a qualche considerazione che vale la pena di fare data la sua importanza per il seguito.

Anzitutto, per quanto riguarda i termini usati, ci sono state lunghe discussioni a proposito della natura delle proposizioni che li presentano. Per esempio la prima proposizione: *'Il punto è ciò che non ha parte*', oppure la proposizione che riguarda la retta: *'La linea retta è quella che giace ugualmente rispetto a tutti i suoi punti'*, sono da intendersi come delle definizioni nel senso della logica classica, fatte 'per genus et differentiam'. Molte cose sarebbero da dirsi a questo proposito; ci limitiamo ad osservare che, se anche queste frasi fossero delle definizioni nel senso rigoroso del termine, esse presuppongono la conoscenza di altri termini e quindi il possesso di un certo patrimonio di idee sulle quali le pretese definizioni sono appoggiate.

Inoltre si osserva che queste proposizioni non sono mai richieste esplicitamente nel seguito per la conclusione di certi ragionamenti. Ciò ha fatto pensare a certi critici che queste frasi piuttosto che delle definizioni, nel senso logico rigoroso del termine, siano piuttosto delle 'presentazioni' dei termini usati; un po' come avviene nei dizionari nei quali i termini non sono quasi mai definiti nel senso logico; piuttosto si presentano dei sinonimi e delle frasi che si presumono di significato noto, che permettono di usare il termine nel senso giusto.

Per quanto riguarda le proposizioni date senza dimostrazione, esse sono divise in due classi; una è la classe delle proposizioni chiamate 'assiomi', la seconda è quella delle proposizioni chiamate 'postulati'. Anche a proposito di queste frasi, le analisi della critica sono state numerose; si è osservato per esempio che gli assiomi enunciano delle 'verità' che hanno una validità generale: per esempio il seguente: *'Aggiungendo cose uguali a cose uguali si ottengono cose uguali'*. Ovviamente anche in questi casi si dà per conosciuto che cosa si intende indicare col verbo *aggiungere*; ma la validità generale della proposizione non appare messa in dubbio. Invece, per quanto riguarda i postulati, si è osservato che essi, come vedremo, riguardano dei fatti che appartengono ad un ambito più ristretto; inoltre il loro stesso nome fa pensare che colui che espone non pretende di enunciare una verità che non possa essere negata, ma si accontenta di richiedere che la verità della proposizione sia ammessa senza per questo escludere che si possa anche pensare diversamente.

I postulati che Euclide enuncia sono cinque e li riportiamo qui di seguito, perché il lettore possa farsi un'idea del tipo di proposizioni e del contenuto che esse hanno.

I - Si postula che per due punti possa sempre farvi passare una retta.

2 - Si postula che una retta possa essere prolungata indefinitamente per diritto.

(Da questo secondo postulato si trae che nella nomenclatura di Euclide il termine *retta* indica piuttosto ciò che noi indichiamo oggi con *segmento*; invero per il vocabolario di oggi non avrebbe senso l’operazione di prolungare una retta, la quale viene già concepita come infinita nei due sensi).

3 - Si postula che si possa sempre tracciare un cerchio avente il centro in un punto qualunque ed avente un raggio qualunque.

4 - Si postula che tutti gli angoli retti siano uguali.

5 - Si postula che se due rette formano con una trasversale comune due angoli che hanno somma diversa da due rette, le rette si incontrino, e precisamente da quella parte della trasversale da cui la somma degli angoli è minore di due retti.

Quest’ultimo postulato è il famoso *Quinto postulato* sul quale parleremo a lungo; esso viene anche detto semplicemente *Postulato della parallela* per una ragione che vedremo subito, o anche più semplicemente ancora *Postulato di Euclide*. Corrispondentemente la geometria nella quale tale postulato viene considerato valido viene detta geometria euclidea. Prima di addentrarci nella analisi logica e psicologica del Postulato di Euclide vorremmo fare qualche osservazione preliminare.

Anzitutto è chiaro che la caratteristica dei postulati è quella di enunciare delle 'verità' di un tipo più ristretto di quello degli assiomi; si potrebbe dire delle verità ristrette all'ambito delle geometria; i primi tre enunciano addirittura la possibilità di eseguire certe operazioni concrete, come quella di tracciare e di prolungare un segmento oppure di tracciare una circonferenza.

Una seconda osservazione ci porta ad una analisi del significato che a queste proposizioni veniva dato nell'epoca classica e che è stato dato per più di venti secoli successivi. Volendo utilizzare un linguaggio intuitivo, si potrebbe dire che queste proposizioni erano interpretate come delle affermazioni di qualche cosa di vero su qualche cosa. In altre parole la interpretazione era quella che esse enunciassero delle proprietà evidenti delle cose nominate. Dove esistessero queste 'cose' non è precisato; l’opinione di Platone, come è noto, era che le figure concrete che il matematico traccia sulla sabbia sono soltanto dei simboli approssimati ed inadeguati delle vere figure, che hanno la loro consistenza dalla definizione logica. Ritroveremo questa idea in Cartesio, il quale distinguerà tra le linee 'geometriche', cioè quelle date da una definizione, e le linee 'meccaniche' cioè quelle la cui consistenza si basa soltanto sul disegno che se ne fa. Oggi le chiameremo linee che risultano dal diagramma di una legge empirica. Comunque il carattere che era attribuito a queste proposizioni era quello di proposizioni oggettive e evidenti.

La discussione secolare che venne fatta a proposito del Quinto postulato condusse ad una concezione del tutto diversa, ma di conseguenza anche ad una nuova concezione del concetto di legge matematica e di descrizione scientifica della natura. Riteniamo quindi utile esporre, almeno nelle linee generali, questa discussione non tanto per il suo contenuto specifico, ma per il significato che ha avuto e per l'evoluzione critica che essa ha provocato, in tutta la scienza.

Anzitutto per quanto riguarda la forma del postulato si può osservare che esso differisce dai primi quattro nel senso che questi stabiliscono la possibilità di fare certe costruzioni oppure la eguaglianza di certi angoli; invece il quinto stabilisce l'esistenza di un certo punto di intersezione di due rette se esse obbediscono a certe ipotesi. Tale punto di intersezione non viene costruito né si indica dove esso sia; si sa soltanto che esso sta da una certa parte della trasversale. Poiché esiste una sola retta che forma con la trasversale due angoli interni la cui somma vale due retti, e questa retta è la parallela ad una retta data, il postulato viene anche ad affermare la unicità della parallela ad una retta data per un punto dato fuori di essa e quindi viene anche chiamato postulato della parallela.

Già la geometria greca ebbe a fare le prime critiche sul postulato euclideo della parallela: si disse infatti che esso era poco evidente e quindi si cercò di dimostrarlo. Si noti che l'atteggiamento della geometria greca e di tutta la matematica successiva fino al secolo XIX non ammette dubbi sulla verità e cioè sui contenuti del postulato; questo atteggiamento è stato mantenuto attraverso i secoli, fino a quando la dimostrazione della coerenza logica delle geometrie non euclidee portò alla necessità di cambiare il modo di vedere la geometria. Ma per la geometria greca non vi erano dubbi sul fatto che i postulati enunciassero qualche cosa di vero, e che la verità loro scaturisse dalla aderenza alla realtà dei fatti fuori di noi.

Le critiche della geometria greca segnarono l'inizio di una lunga vicenda storica che viene anche chiamata *questione del quinto postulato*; essa si realizza sostanzialmente nei tentativi di dimostrare questo postulato, cioè di trasformarlo in teorema. I numerosissimi tentativi che sono stati fatti durante i secoli sono classificabili in tre classi: vi sono anzitutto i paralogismi, che non arrivano alla dimostrazione per errori logici.

In secondo luogo vi sono quelli che arrivano alla dimostrazione basandosi implicitamente su altre proprietà dello 'spazio' o delle 'figure' che gli autori ritengono più 'evidenti'; infine vi sono quelli che enunciano esplicitamente delle proposizioni che gli autori giudicano come più evidenti e basandosi su quelle arrivano a dimostrare il postulato euclideo.

Un posto a parte merita il Padre Girolamo Saccheri S. J. (1667 – 1733), il quale, nel 1632, scrisse un celebre libro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide emendato da ogni neo) nel quale aprì una nuova strada per la vicenda del quinto postulato, tentandone la dimostrazione per assurdo. Ci soffermiamo brevemente sull'opera del Saccheri perché essa costituisce, come vedremo, il primo esempio di un insieme di proposizioni di geometria non euclidea, ossia di geometria che non dipende dalla validità del quinto postulato. Il Saccheri parte da una figura elementare formata da un quadrilatero avente come base un segmento *AB* ed avente due lati *AC* e *BD* uguali tra loro e formanti un angolo retto con il segmento dato in *A* e *B* rispettivamente; questo quadrilatero potrebbe essere chiamato *birettangolo isoscele*; e si dimostra assai facilmente che i due angoli in *C* e *D* sono uguali tra loro. Ora Saccheri dimostra che il fatto che i due angoli in *C* e *D* siano retti porta come conseguenza che il postulato euclideo sia valido. Egli quindi osserva che il postulato euclideo sarà dimostrato quando si saranno dimostrate assurde le altre due ipotesi, che egli chiama rispettivamente *ipotesi dell'angolo ottuso* ed *ipotesi dell'angolo acuto.* Egli quindi enuncia provvisoriamente ciascuna di queste ipotesi e si accinge a trarne le conseguenze per arrivare a quell'assurdo che sta cercando. Nei fatti arriva facilmente a dimostrare che l'ipotesi dell'angolo ottuso conduce presto all'assurdo, perché conduce alla contraddizione con il secondo postulato, quello che in sostanza afferma la infinità della retta; invero in questa ipotesi si viene a costruire una geometria analoga a quella che si potrebbe costruire sulla sfera, nella quale i circoli massimi hanno lunghezza finita. Per quanto riguarda l'ipotesi dell'angolo acuto, Saccheri dimostra una quantità di teoremi che lo conducono a valutare la lunghezza della curva luogo dei punti che hanno la medesima distanza da una retta. In questa valutazione egli commette un errore, che è causato da una concezione della curva come *costituita* dai suoi punti; ma nella conclusione del suo lavoro egli dichiara che non gli sembra di aver dimostrato l'assurdità dell’ipotesi dell'angolo acuto con la stessa chiarezza con la quale è arrivato a dimostrare l’assurdità dell’ipotesi dell'angolo ottuso. Nella realtà egli è passato alla storia per aver dimostrato per primo un certo numero di proposizioni di geometria non euclidea. Non ci interessa qui un’ulteriore analisi del lavoro di Saccheri, che è stato qui presentato come una prova dell'atteggiamento tenuto per secoli nei riguardi della geometria; tale atteggiamento era dettato dalla convinzione che la geometria fosse una scienza determinata dai suoi contenuti e che questi potessero essere assunti dall’osservazione in quanto evidenti, come punti di partenza di ogni ulteriore deduzione.

Nella prima metà del secolo XIX si giunse alla creazione di certe teorie che erano chiamate *geometrie assolute*, perché prescindevano nei limiti del possibile dalla validità o meno del postulato euclideo; oppure alla invenzione di teorie che negavano esplicitamente il postulato, ammettendo per esempio che per un punto fuori di una retta passassero infinite rette non secanti questa e due parallele distinte. Tuttavia queste dottrine furono considerate per qualche tempo come una specie di mostri logici, nel senso che presso qualcuno era ancora ferma la convinzione che l'unica geometria vera fosse l'euclidea e che queste geometrie fossero delle costruzioni strane e artificiali, che non mostravano chiaramente la loro contraddizione interna, ma che certamente dovevano averla, perché una sola può essere la geometria vera. Tuttavia si giunse presto alla dimostrazione che queste geometrie non sono contraddittorie e quindi hanno la stessa garanzia di validità della geometria euclidea; proprio questa geometria forniva i materiali per la dimostrazione della mancanza di contraddizione delle geometrie non euclidee e quindi la validità della dimostrazione non poteva essere messa in dubbio.

4 - La crisi sul significato della matematica.

La dimostrazione della non contraddittorietà delle geometrie non euclidee costrinse i matematici a cambiare le loro idee sul significato della geometria e aprì una crisi sul significato della matematica che ancora nel presente porta le sue conseguenze. Si dovette abbandonare la concezione classica secondo la quale la geometria è una scienza che dice qualche cosa di qualche cosa e che quindi prende i suoi fondamenti dall'osservazione delle cose evidenti e dimostra le cose meno evidenti. Ci si accorge che il fatto che una proposizione sia un postulato non dipende dalla proposizione stessa, ma dalla teoria nella quale la proposizione stessa viene inserita; infatti per secoli la matematica si sforzò di cambiare quello che Euclide aveva presentato come un postulato in un teorema, presupponendo o enunciando prima di esso delle altre proposizioni. Si giunse quindi all'assetto attuale della geometria, assetto nel quale questa scienza assume due aspetti, tra loro distinti: l'aspetto di un sistema astratto, un insieme di proposizioni *ipotetico – deduttive*, e l'aspetto di una scienza che può essere considerata come il primo capitolo della fisica.

Prenderemo in considerazione anzitutto il primo aspetto, quello della geometria come sistema ipotetico - deduttivo. In questo ordine di idee la geometria si presenta come un puro gioco logico, nel quale le proposizioni primitive non pretendono affatto di esprimere qualche cosa di vero di una realtà fuori di noi e quindi sono poste semplicemente come ipotesi del ragionamento successivo; i termini che si impiegano non sono dei nomi di cose, ma semplicemente dei segna-posto per le proposizioni che enunciano la relazione tra questi enti, precisate dai postulati. Quindi la definizione dei termini non viene data con riferimento ad una realtà sperimentale; ma semplicemente viene data implicitamente dall'insieme dei postulati che costituiscono l'insieme di regole grammaticali con le quali i termini devono essere impiegati. Avviene un poco ciò che si verifica nei giochi, per esempio negli scacchi o nei giochi delle carte. Negli scacchi il nome di un pezzo, per esempio il cavallo, non costituisce ovviamente la definizione del pezzo stesso; questa è invece data implicitamente da tutte le regole, che precisano come si giochi con quel pezzo e con tutti gli altri. Non vi può quindi essere materia di scandalo e contraddizione per il fatto che la retta della geometria euclidea si comporti in modo diverso della retta della geometria non euclidea; invece si tratta di figure diverse perché i postulati che le precisano sono diversi; soltanto il nome è lo stesso, ma questo non costituisce alcun riferimento alla realtà. Così come quando si usa uno stesso mazzo di carte per giochi differenti non vi può essere scandalo o contraddizione se una medesima carta, per esempio il re, ha un valore differente in due giochi diversi; invero le differenti regole dei due giochi danno le definizioni implicite di due carte diverse anche se per comodità sono rappresentate dalla stessa figura e chiamate con lo stesso nome.

Ciò che precede potrebbe far pensare che la geometria non abbia più alcun valore conoscitivo e che essa si riduca ad un puro gioco logico, che non ha alcun significato per la realtà. Ma questa prima impressione deve essere mitigata dalla considerazione del secondo aspetto della geometria: quello del primo capitolo della fisica, cioè quello di una scienza la quale ci dà la teorizzazione delle nostre sensazioni riguardanti la forma, la grandezza e la mutua posizione dei corpi estesi. Sotto questo aspetto la geometria veniva già considerata dal fisico H. Von Helmoltz il quale, in polemica con i kantiani della sua epoca (Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land. "Mind" April 1878, No. X), rivendicava al fisico il diritto di scegliere le proposizioni iniziali della geometria aderendo all'esperienza e non secondo l’intuizione a priori dello spazio. In questo senso la geometria ha un valore conoscitivo, a differenza del gioco degli scacchi, ma questo valore, pur innegabile, non è assoluto, come pretendeva la matematica classica. Esso è il valore conoscitivo di una qualunque teoria fisica, che non può pretendere di dire tutta la verità su tutta la realtà. In più non esiste teoria fisica che abbia una validità assoluta, e non è possibile che due teorie fisiche siano contraddittorie e siano ugualmente adatte a descrivere certi aspetti della realtà, entro gli stessi limiti degli errori di osservazione e di verifica. In questo ordine di idee l'errore consisterebbe nella pretesa di aderenza perfetta delle nostre sensazioni e delle nostre misure a ciò che vediamo ed a ciò che misuriamo.

Ritorneremo su questo argomento quando discuteremo sul concetto di *verità* di una teoria fisica. Qui ci limitiamo a ribadire ciò che vorremmo dire con un esempio: si consideri ciò che facciamo quando usiamo una carta geografica per studiare una parte della superficie della terra; sappiamo che la rappresentazione data da una carta è sbagliata in assoluto, perché la superficie terrestre non è 'applicabile' sul piano. Tuttavia entro certi limiti di approssimazione che sono ben determinati, la rappresentazione sul piano data da una carta geografica può essere considerata pienamente soddisfacente, per la pratica ed anche per la teoria, entro quei limiti che di volta in volta il problema pratico e teorico indicano.

Pertanto la geometria non cessa di avere un valore conoscitivo per la realtà che ci circonda; la sola cosa che può essere detta, è che le proposizioni da cui la geometria può prendere il suo avvio sono *suggerite* ma non *imposte* con necessità logica dall'osservazione di una pretesa *evidenza* di una realtà esteriore. Il che fa passare da una concezione che potremmo chiamare euclideo - newtoniana della scienza alla concezione moderna, che ammette la possibilità di un ritorno continuo sull'osservazione per il controllo delle deduzioni e quindi per la conferma delle ipotesi ammesse.

Vorremmo osservare qui, come faremo in seguito, che questo atteggiamento non pregiudica in alcun modo una posizione nei riguardi di una determinata metafisica e quindi non depone affatto a favore di un preteso idealismo che dovrebbe essere confermato dalla evoluzione continua della scienza. A nostro parere infatti questa evoluzione non fa che confermare la convinzione giustificata e fondata dello scienziato nella conoscibilità della natura, anche se la fatica di approssimare la conoscenza e di migliorare le nostre idee sul mondo può portare a parlare addirittura di una "guerra", come diceva Keplero. Tuttavia la nuova posizione, che è stata imposta degli sviluppi della geometria e che veniva a coinvolgere anche tutta la matematica, poneva dei problemi logici che presenteremo qui, con riserva di ritornare su di essi quando avremo parlato della critica dell'aritmetica e in particolare del concetto di numero.

5 - Significato della geometria.

Abbiamo detto che nella concezione moderna della geometria non si rinuncia al valore conoscitivo di essa, bensì si accetta che le proposizioni primitive ci siano soltanto suggerite, ma non imposte dalla osservazione della realtà dei corpi estesi. Nel caso limite della geometria concepita come un sistema ipotetico-deduttivo, le proposizioni primitive sono considerate puramente come delle ipotesi e quindi possono essere scelte con una grande libertà. Tale libertà tuttavia non è assoluta, perché rimane la necessità che le proposizioni primitive, nel loro insieme, non contengano delle contraddizioni nascoste; contraddizioni che non sono avvertite immediatamente quando le proposizioni sono enunciate, ma che potrebbero essere rese manifeste quando si traggano delle conseguenze. In fondo questa era la posizione nella quale si poneva G. Saccheri, il quale riconosceva che l'ipotesi dell'angolo acuto non presentava una assurdità manifesta nel momento della sua enunciazione, ma voleva coglierne l'assurdità traendone tutte le conseguenze fino al momento in cui la contraddizione fosse palese. Ora quando la scelta delle ipotesi teoriche di partenza non è più fondata sulla realtà supposta osservata nella sua evidenza, ma è libera, la situazione è nettamente cambiata; per esempio si potrebbe verificare il caso della invenzione di un gioco il quale appare come perfettamente ragionevole nel momento della sua invenzione, ma che potrebbe portare a una situazione in cui due avversari potrebbero pretendere entrambi di essere vincitori, dopo una partita giocata con il rispetto delle regole, quando invece il vincitore deve essere uno solo, nell'intenzione dell'inventore.

Quando la geometria era intesa nella concezione classica questo problema non sussisteva; invero se le proposizioni di partenza sono concepite come dettate dall'osservazione della realtà, e ne colgono l'evidenza, non può essere supposta una contraddizione nell'enunciazione delle proposizioni primitive, perché questa si rifletterebbe sulla contraddizione della realtà con se stessa. Ora si potrebbe dire che uno dei postulati inespressi, ma fondamentali, della conoscenza umana è la conoscibilità e la coerenza della realtà. Invero se la realtà fosse incoerente la ricerca di una sua conoscenza razionale e spiegata nelle ragioni non avrebbe alcun fondamento e forse non sarebbe neppure intrapresa. Ma se si pretende che le proposizioni primitive di una teoria possano essere scelte in modo libero e che esse non abbiano alcuna pretesa di fondarsi sull'evidenza di una realtà osservata, allora il dubbio che una contraddizione possa essere nascosta e rendersi evidente con lo sviluppo della deduzione è fondato e al costruttore della teoria incombe l'onere della prova in contrario.

Va detto inoltre che questa crisi non è stata limitata ai fondamenti della geometria, ma che essa costituisce soltanto una parte della crisi dei fondamenti della matematica in generale; tale crisi ha coinvolto da una parte i fondamenti della matematica e dall'altra anche i fondamenti della logica. Per questa ragione dovremo soffermarci un poco a lungo su questi argomenti, perché essi costituiscono in certo modo l'occasione e lo stimolo per l'evoluzione della filosofia della scienza verso il neopositivismo logico. Tuttavia, prima di esporre brevemente questa problematica, vorremmo introdurre gli argomenti della matematica che hanno dato origine a questa crisi. Dovremo quindi parlare brevemente del problema del *continuo* e delle origini del calcolo infinitesimale.

6 - Il continuo. Infiniti e infinitesimi.

Il concetto di *continuo* appare a prima vista come abbastanza chiaro e tale è stato considerato dalla scienza classica. Ogni tentativo per definire che cosa si intende per continuo cade nella petizione di principio, oppure nell'utilizzazione di concetti che si presumono più chiari ma che tali non sono. Tuttavia potremmo tentare una breve analisi della genesi psicologica di tale concetto e osservare semplicemente che le esperienze concrete che stanno all'origine di esso si riferiscono a esperienze visive o tattili, che non ci permettono di rilevare negli enti materiali osservati alcuna lacuna o alcuna 'struttura granulare'. Abbiamo messo tra parentesi le espressioni utilizzate perché esse, per quanto possono apparire chiare, non lo sono affatto. E dall'altra parte i mezzi di cui oggi disponiamo per l'osservazione ci rendono certi del fatto che le superfici che noi vediamo prive di lacune o che percepiamo al tatto come perfettamente lisce non lo sono per nulla nelle realtà e che quindi questa nostra osservazione rileva semplicemente, dalla imperfezione dei nostri sensi e dalla limitatezza della 'banda' sensoriale, delle sensazioni visive ai nostri occhi.

Nella concezione classica la sensazione di *continuità* era estrapolata con la fantasia a tutti i livelli, e quindi l'idea del continuo traeva la sua origine da una estensione delle nostre sensazioni a qualunque scala, estensione che non era autorizzata da alcuna esperienza né dedotta da alcuna necessità logica. Questa concezione che - ripetiamo - non è fondata sulla logica né sull'esperienza, ma un misto di questa e di fantasia ha tuttavia originato il calcolo infinitesimale e ha dato l'avvio alla concezione moderna della matematica.

Si può ritrovare l'origine di queste ricerche nelle idee di B. Cavalieri, che con la sua *Geometria degli indivisibili* fondò sostanzialmente il calcolo infinitesimale. Tuttavia si ritrovano tracce di questo anche nell'opera di Archimede, il quale si era posto il problema di valutare la superficie di certe figure che non sono limitate da linee rette o da segmenti di retta, oppure di valutare il volume di certi corpi che non sono limitati da facce piene. Questo problema, come vedremo, coinvolge una ripetizione indefinita di operazioni e la concezione della continuità come proprietà fondamentale della materia o almeno delle figure geometriche. Invero Archimede, come si vede poi dalle sue opere recentemente ritrovate, aveva avuto l'idea, che poi si ritroverà in Cavalieri, in Galileo ed in Newton, di 'tagliare' una figura piana in striscioline sottilissime, oppure di tagliare il solido in 'fettine' sottilissime.

La questione fondamentale, che si prolungò fino quasi alla fine del secolo XVIII, fu di discriminare la natura di questi elementi, di queste 'fettine'; invero la concezione di Cavalieri (almeno dove essa viene presentata abbastanza chiaramente) era quella di concepire queste 'fettine' come di natura diversa da quella del solido; da qui il nome di *Indivisibili* che Cavalieri dava a questi "elementi costitutivi" della figura. Elementi tuttavia che venivano considerati come sfuggenti alla nostra sensibilità e che tuttavia dovevano essere misurabili, e con i quali doveva essere possibile costruire un calcolo.

Concezioni analoghe si trovano in G. W. Leibniz, che introduce il concetto di *differenziale*, e fonda su questo addirittura un calcolo. Effettivamente il progresso fondamentale non sta, a quest'epoca, nell'analisi della natura di questi pseudo-enti, ma nella istituzione di una tecnica di deduzione. Soltanto il secolo XIX arriverà alla fondazione rigorosa del concetto di limite, che in forma intuitiva era già stato utilizzato da Newton.

Non possiamo sviluppare qui tutti i particolari del calcolo infinitesimale e pertanto dobbiamo limitarci a saltare alle conclusioni che si ebbero, come abbiamo detto, nel secolo XIX, con la fondazione rigorosa del concetto di numero reale e con la risoluzione del problema di costruire un insieme di simboli che fosse adeguato a rendere formalmente la intuizione fantastica del continuo geometrico, che era stata alla base della costruzione della geometria analitica. La questione fondamentale è chiaramente quella di dominare una successione potenzialmente infinita di operazioni mentali o materiali, senza che ci si debba fondare sulla cosiddetta intuizione geometrica.

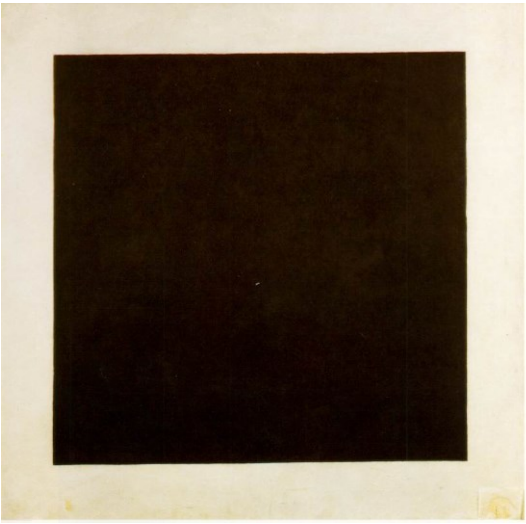
7 - Il numero.

Quando la critica del secolo XIX fece giustizia delle considerazioni pseudo metafisiche che avevano accompagnato l'invenzione del calcolo differenziale ed integrale e che avevano provocato molte dissertazioni a proposito dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande, si giunse al problema logico e filosofico fondamentale.

A nostro parere questo problema nasce dalla procedura che conduce alla razionalizzazione del concetto di infinitesimo e di infinito; tale procedura consiste essenzialmente nella possibilità di dominare logicamente una successione potenzialmente infinita di procedimenti o se si vuole di atti di pensieri. Per dare un'idea concreta di quanto vogliamo dire, pensiamo al problema di determinare la misura di due grandezze tra loro incommensurabili; immaginiamo per esempio di assumere come unità di misura delle lunghezze un determinato segmento e di voler misurare la diagonale del quadrato costruito sul segmento come lato. Una delle prime proposizioni di cui si conosca la dimostrazione logica è il teorema che viene attribuito a Pitagora e che porta come conseguenza il fatto che il lato e la diagonale di un medesimo quadrato sono incommensurabili tra loro; ciò si esprime dicendo che per esempio la diagonale non può mai essere ottenuta come multiplo di un segmento che sia un sottomultiplo del lato. Vi è tuttavia la possibilità di confrontare la diagonale con tutti i possibili sottomultipli del lato, per esempio prendendo dei sottomultipli del lato secondo numeri interi sempre più grandi.

Si può quindi pensare ad un insieme infinito di numeri che vengono chiamate misure per difetto della diagonale; tutte queste misure possono essere trattate come unico ente che viene chiamato *numero irrazionale*. Questo 'numero' quindi è costituito da un'infinità di numeri razionali (misure di coppie di grandezze commensurabili). Problemi analoghi sono stati posti anche dalla filosofia e dalla matematica greca con i celebri paradossi dell'infinito, per esempio il celebre paradosso detto 'di Achille'. Anche questo paradosso viene risolto, dalla critica matematica del secolo XIX, con il concetto di *limite di una successione infinita* e quindi con il concetto che è strettamente legato alla possibilità di dominare una infinità potenziale di atti di pensiero o di calcolo.

Pertanto la critica della continuità e delle procedure del calcolo infinitesimale classico conduce in modo naturale ai problema di logica, che sono posti dalla teoria degli insiemi e dalla critica del concetto di numero intero.



K.S.Malevich. Quadrato nero.1915.Museo di San Pietroburgo.

V - LA LOGICA NEL PROCESSO SCIENTIFICO. LA FORMALIZZAZIONE DELLA LOGICA E LA LOGICA MATEMATICA.

1 - Algebrizzazione della logica formale.

Abbiamo presentato uno schema del procedimento scientifico fondamentale; secondo questo schema esiste un continuo movimento ciclico che, partendo dall'osservazione, conduce alla formulazione di ipotesi e da queste, attraverso la deduzione, al confronto con la realtà sperimentale o dell'osservazione. Possiamo pertanto dire che il momento della deduzione appare come uno dei momenti fondamentali del processo scientifico; quindi i problemi della deduzione debbono venire analizzati, seppure sommariamente, in una trattazione che voglia rendere conto del processo scientifico nel suo complesso. Pertanto si presenta qui come non ignorabile il problema della logica, nell'ambito della teoria della scienza.

Ricordiamo che nella accezione classica la logica veniva suddivisa in logica formale (anche 'logica minor') e logica materiale (o anche 'logica major'). Per quanto riguarda questa distinzione potremmo dire che sostanzialmente il nostro lavoro è dedicato alla logica materiale, cioè allo studio dei metodi per la ricerca della verità ed ai criteri per l'accertamento di questa; ci occuperemo tuttavia ora in modo particolare della logica minore o formale. Questa, dal punto di vista strettamente tecnico, potrebbe essere considerata in condizione 'ancillare' di fronte alla logica materiale; tuttavia appare utile rendersi conto dei suoi procedimenti per i problemi epistemologici che sono posti da questi.

Ancora una volta, seguendo la tecnica che abbiamo già adottato ripetutamente, cercheremo di dare una descrizione sommaria dell'argomento, per giungere progressivamente ad un'analisi più precisa. In questo ordine di idee si potrebbe dire che la logica è stata spesso considerata piuttosto una tecnica che una scienza; non per nulla nelle trattazioni classiche si intitolava il capitolo relativo 'Ars logica'; si considerava cioè la logica come una dottrina che aveva propriamente poco della scienza ma che piuttosto era destinata a dirigere le lezioni ed i procedimenti umani per certi scopi, che sostanzialmente erano quelli della ricerca della verità. In linea di massima, e come descrizione provvisoria, potremmo presentare la logica come la dottrina che studia i procedimenti per trarre delle conclusioni valide da premesse valide.

È chiaro che anche in questo caso, e si direbbe addirittura soprattutto in questo caso, si presenta come necessaria l'adozione della tecnica di analisi che abbiamo già adottato più volte: invero non si saprebbe discutere e dimostrare qualche cosa in relazione alla logica ed al problema particolare della deduzione se già non si possedesse in qualche modo un'idea, per quanto grossolana e sfumata, di ciò che è il ragionamento valido e la conclusione rigorosa. Anche qui dunque, come nel caso dei linguaggi specializzati delle varie scienze, conviene partire non da una trattazione formalizzata e generalissima, ma da una nozione sfumata e confusa, per proseguire nella analisi che porta alla trattazione più astratta, generale e rigorosa. Nel nostro caso si potrebbe partire da un'idea intuitiva, anche se ingenua, di *verità* di un enunciato o di un ragionamento. Invero non appare possibile, almeno in linea di principio, iniziare l'analisi di una teoria della deduzione senza avere, almeno in parte, analizzato il significato del termine *conoscenza* e degli strumenti verbali (interiori ed esteriori) con i quali la conoscenza stessa viene realizzata e comunicata. Tutto questo ci condurrebbe probabilmente a riaprire la 'quaestio de universalibus', che del resto non pare essere mai chiusa, poiché le successive generazioni di uomini ripropongono instancabilmente gli stessi problemi filosofici e storici. Si potrebbe inferire di qui la validità di quella frase di Rémy de Gourmant: "*Tout a déjà été dit, mais, puisque personne n'écoute, il faut toujours tout répéter*".

Esula dagli schemi di questo lavoro lo svolgimento completo della storia della logica, storia per la quale rimandiamo ai trattati specializzati; ci limitiamo quindi a sfiorare qui il problema della logica intesa come strumento deduttivo, e quindi come strumento fondamentale di un momento ineliminabile del processo di formazione del sapere scientifico. Di conseguenza anche riterremo note le nozioni relative alla logica verbale ed alla teoria del sillogismo, quale è stata presentata da Aristotele.

Non vogliamo qui approfondire la questione se non su un fatto: da un certo punto di vista, si potrebbe osservare che anche il sillogismo ha l'aspetto di un *calcolo con le frasi*. Nel senso che la validità della conclusione del sillogismo di una certa figura sta non tanto nel contenuto delle frasi che formano la premessa maggiore o minore, ma nel concatenamento di esse, e nella struttura di esse: se queste sono per esempio universali affermative, oppure singolari negative ecc. In altre parole, la logica classica insegna a dedurre indipendentemente dal significato e dal contenuto delle frasi che sono le premesse del ragionamento, ma soltanto in conseguenza della loro forma. Anticipando ciò che verrà detto più a lungo in seguito, potremmo mettere l'accento sulla analogia che un tale modo di procedere ha per esempio con il calcolo aritmetico: il risultato della operazione su certi numeri non dipende dal significato concreto che questi hanno, ma soltanto dalle leggi che reggono i numeri stessi e che regolano l'uso dei simboli adottati per rappresentare i numeri interi.

Abbiamo visto in altra parte di questo nostro lavoro che la tendenza alla matematizzazione appare come una delle caratteristiche fondamentali della scienza modernamente intesa; non vi è nulla di strano quindi che una tendenza cosiffatta si sia manifestata anche nella logica, naturalmente nelle forme consentite dalla materia e secondo lo sviluppo storico di questa, sviluppo che non riproduce esattamente lo svolgimento della storia della scienza, ma ne segue le vicende principali. Non è senza significato che in questo ordine di idee uno degli iniziatori delle moderne concezioni della logica sia stato G. W. Leibniz. Infatti, non possiamo non ricordare che egli fu anche un matematico di grande importanza, ed anzi uno dei fondatori di quel ramo della matematica moderna che viene abitualmente chiamato *Calcolo infinitesimale*. (****)

Effettivamente troviamo in Leibniz la ricerca del nuovo anche in matematica; i risultati, molti dei quali validi ancora oggi, sono tuttavia basati su ragionamenti e considerazioni che con la matematica hanno poco a che vedere. Spesso infatti si trovano considerazioni sulle quantità che Leibniz chiama 'evanescenti', che in altri trattatisti vengono chiamate 'infinitamente piccole'; Leibniz inventò tutto un sistema di calcoli e di regole assolutamente nuovi rispetto al tempo in cui le dava per la prima volta; tali regole hanno trovato la loro giustificazione completa e rigorosa soltanto nel secolo XIX, come abbiamo già accennato.

Coerentemente con l'invenzione di nuove forme di calcolo, si trova in Leibniz la ricerca costante di nuovi formalismi che servissero per la deduzione, cioè di nuove forme di logica minore che fossero nettamente diverse dalle deduzioni fatte fino a quel tempo verbalmente; tecniche di deduzione che si riducessero al puro calcolo, inteso come manovra di simboli astratti, retta da regole che costituiscono in certo modo la grammatica dei simboli stessi. È ben nota la dichiarazione programmatica del Leibniz, il quale si augurava che nel futuro non vi fossero più dispute interminabili fra i dotti, ma che due dotti, per decidere in modo certo e definitivo della divergenza delle loro opinioni, dovessero limitarsi a dire *Calculemus*. (**) Non si potrebbe esprimere meglio l'aspirazione leibniziana alla certezza e alla meccanicità della deduzione, perché tali sono appunto le caratteristiche delle deduzioni che avvengono mediante il calcolo aritmetico.

In coerenza con questa tendenza la logica ha sviluppato dei metodi e delle procedure che si sono avvicinate a questo ideale leibniziano. Non possiamo qui seguire completamente lo sviluppo storico di questo fenomeno, che si potrebbe descrivere come fenomeno di algebrizzazione della logica formale. Ripetiamo tuttavia che si tratta esclusivamente della logica formale, ovvero minore: infatti anche in Leibniz era ben distinto il momento del conferire il significato ai simboli dal momento del dedurre in base alle leggi inerenti ai simboli stessi, momento questo che è il solo di competenza della logica minore. Tra i fondatori della dottrina che stiamo esponendo viene annoverato George Boole (1815 – 1864), il quale è oggi universalmente ricordato per causa di un'algebra della logica o dei concetti, che porta (insieme con le sue estensioni formali) il nome di *Algebra di Boole*.

2 - Algebra di Boole.

Cercheremo di dare qualche idea dell'Algebra di Boole perché è più vicina a noi e viene oggi riconosciuta come la sorgente delle ricerche logiche posteriori. Occorre avvertire in linea preliminare che nell'Algebra di Boole, e poi nella maggioranza delle trattazioni successive di logica formale, si fa una scelta tra le due caratteristiche di un concetto: la sua intensione e la sua estensione. Dall'epoca di Boole (la sua opera che fonda questo ramo della logica ha per titolo: *An Investigation of the Laws of Thought*) quasi tutti i tentativi di un'algebra della logica hanno fatto questa scelta.

Molti autori, con uno spirito di completo empirismo e di totale negazione del significato della conoscenza, addirittura identificano (!) il concetto con l'insieme degli oggetti ai quali questo si applica. Ma anche quando l'identificazione non è così rudimentale e superficiale, è chiaro che la connotazione di un concetto viene associata all'estensione di questo: si comprende quindi anche la nascita della cosiddetta 'teoria degli insiemi' di cui parleremo in seguito, che fa la sua comparsa sostanzialmente in modo contemporaneo alla nascita delle ricerche delle nuove forme di logica.

Non diamo qui la definizione del concetto di *insieme*: ci limitiamo a rimandarne per il significato al linguaggio comune, dando al più dei termini che riteniamo sinonimi: collezione, gruppo, raggruppamento, ecc. In modo analogo non daremo una definizione esplicita del concetto di *elemento di un insieme.* Gli esempi di insiemi concreti sono innumerevoli: i cittadini di una città, gli allievi di una classe, le parole di genere maschile di un vocabolario ecc. Ci rifaremo quindi alla nozione comune e all'uso quotidiano dei termini; in modo analogo accettiamo dalla nozione comune il concetto di *sottoinsieme* di un dato insieme; per esempio, riteniamo chiaro che quando agli elementi di un insieme si pone una condizione logica, si ottiene un sottoinsieme dell'insieme dato: per esempio quando si impone agli elementi dell'insieme dei numeri la condizione di essere pari, si ottiene un sottoinsieme dell'insieme dei numeri.

Si potrebbe pensare che al concetto di 'insieme' possa corrispondere quello di 'proprietà', ovvero di 'predicato', o altro concetto che appartiene alla logica antica o al buon senso rudimentale: invero tutti gli oggetti esistenti, che hanno una certa proprietà o dei quali un certo predicato può essere enunciato con verità, formano ovviamente un insieme. D'altra parte qualora venisse dato in qualche modo un insieme, tutti i suoi elementi posseggono una proprietà comune, che è per esempio quella di appartenere all'insieme considerato. Si pensi per esempio a tutte le persone che si trovano su una medesima vettura ferroviaria ad un determinato istante.

È da osservarsi tuttavia che nella mentalità comune si è tentati di accettare anche la proposizione inversa, cioè che ad ogni proprietà si possa far corrispondere un insieme. Questa convinzione, che era stata adottata anche da G. Frege (1848 – 1925) nella sua analisi dei fondamenti dell'aritmetica, deve tuttavia essere sottoposta a una critica, perché altrimenti porterebbe alla aporia che viene abitualmente richiamata con l'espressione *Paradosso di Russell*. Ritorneremo in seguito su questo problema; vogliamo qui spendere qualche parola a proposito della definizione del concetto di insieme. Viene spesso citata la seguente frase di Georg Cantor (1845 – 1918), (in *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895): «*Col nome di "insieme" intendiamo indicare ogni collezione M di oggetti definiti e distinti m della nostra intuizione o del nostro pensiero, considerata come un tutto unico*.»

Questa frase presuppone noto il concetto di *collezione* ed il significato dell'espressione *considerare come un tutto unico*. Per evitare il regresso 'in infinitum' e i circoli viziosi che si otterrebbero con successive definizioni, oggi si preferisce dare una definizione implicita dei concetti fondamentali della teoria degli insiemi, con un procedimento analogo a quello di cui già abbiamo parlato a proposito dei fondamenti della geometria (IV/§4), rinunciando a definire i singoli termini e dando invece un insieme di proposizioni primitive le quali forniscono le definizioni implicite dei termini usati, mediante la 'grammatica logica' che precisa le modalità del loro impiego. Noi non diamo qui una trattazione completa della teoria degli insiemi, e ci rifacciamo al significato abituale della parola *insieme*, limitandoci a mettere in luce la possibilità di eventuali paradossi e quindi la necessità di precauzioni, che vedremo in seguito, almeno in modo sommario.

A.Mazzotta . ***Insiemi…..(1)***

Ci pare molto difficile proseguire nell'esposizione della problematica della teoria degli insiemi senza fare una piccola diversione, dedicata all'esposizione del formalismo oggi adottato e dell'Algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme dato. A questi argomenti dedicheremo quindi il prossimo paragrafo. La nostra esposizione rimarrà tuttavia ad un livello strettamente elementare, e si baserà sul concetto intuitivo (ingenuo o naïf) del concetto di insieme.

3 - Algebra di Boole e teoria naïf degli insiemi.

Indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole: $A, B, C, \ldots\ldots$

Per indicare che un oggetto appartiene ad un certo insieme A si suole scrivere

$$a \epsilon A ,$$

leggendo "a è un elemento di A", oppure anche "l'oggetto a appartiene all'insieme A". Il simbolo "ϵ" è stato introdotto da G. Peano ed è una deformazione della lettera greca "ε" (epsilon) pensata come iniziale della terza persona singolare del verbo 'essere'; in altre parole "ϵ" stava, nell'intenzione di Peano, per la parola greca "$\varepsilon\sigma\tau\iota\nu$ ".

Naturalmente non si esclude che esistano insiemi che hanno un solo elemento; tuttavia si fa distinzione tra l'oggetto a e l'insieme - indicato con $\{a\}$ - che è formato dal solo elemento a.

Si introduce anche l'insieme *vuoto*, che può essere indicato con $\emptyset$.

Dati due insiemi A e B, si definisce tra loro una relazione di identità, relazione che si indica scrivendo $A = B$ se ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa. Questa definizione potrebbe essere criticata da qualcuno dicendo che non ha senso parlare di due insiemi quando ogni elemento dell'uno è anche elemento dell'altro: in questo caso si tratta invero di unico insieme. Qui tuttavia si instaura una discussione abbastanza sottile, sulla questione dell'esistenza di un insieme e sul significato di questa esistenza. È chiaro che se l'esistenza di un insieme si riduce a quella dei suoi elementi, che sono per così dire prioritari dell'insieme stesso, allora la critica alla definizione è ben fondata. Ma nella concezione dei matematici che hanno fondato questa dottrina la *collezione* è qualche cosa di diverso dalla pura somma dei suoi elementi. Tantoché si potrebbe dare anche "l'insieme vuoto", cioè l'insieme che non possiede elementi.

A nostro parere il fatto fondamentale che fa superare tutte le giuste critiche a questa impostazione è quello che porta alla possibilità di simbolizzare la relazione tra i due insiemi in modo da renderla simile in forma (se non ovviamente identica in contenuto) con la relazione di uguaglianza ben nota nella matematica. Invero questa relazione di uguaglianza possiede le tre proprietà, che vengono chiamate tradizionalmente *riflessiva, simmetrica, transitiva*, e che vengono espresse simbolicamente dalla formule:

$A = A$ (*riflessiva*);

se $A = B$ allora anche $B = A$ (*simmetrica*);

se $A = B$ ed anche $B = C$ allora $A = C$ (*transitiva*).

Come abbiamo già detto, imponendo una condizione logica agli elementi di un insieme (supposto dato) si ottiene un altro insieme, che viene chiamato sottoinsieme del dato. La relazione tra un insieme A ed un insieme B, quando A sia sottoinsieme di B, si esprime con il simbolo

$A \subseteq B$.

È chiaro che la condizione logica che si può imporre può essere la tautologia, e si ottiene quindi che per ogni insieme A vale la relazione

$A \subseteq A$.

È pure chiaro che quando si imponga una condizione contraddittoria si ottiene l'insieme vuoto, che quindi viene considerato come sottoinsieme di un insieme qualsivoglia.

Per la relazione di inclusione tra insiemi valgono le proprietà seguenti:

I) se $A \subseteq B$ ed anche $B \subseteq A$, allora $A = B$;

II) se $A \subseteq B$ ed anche $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.

È facile osservare che la proprietà II) può essere espressa in parole con un sillogismo nella forma classica: se ogni a è un b ed ogni b è un c, allora ogni a è un c. Va tuttavia osservato che nel caso che stiamo esaminando il ragionamento dato dal sillogismo viene sostituito dalla applicazione di una proprietà formale dei simboli utilizzati. Pertanto l'utilizzazione di questo formalismo costituisce un passo verso la trasformazione della deduzione in calcolo, trasformazione che è coerente con l'evoluzione di tutta la scienza verso la matematizzazione.

Va ricordato che tra due insiemi A e B può essere definita anche una relazione di inclusione in senso proprio, quando A è sottoinsieme di B ma si esclude che possa coincidere con B stesso. Si indica questa relazione col simbolo:

$A \subset B$;

essa sussiste ovviamente quando ogni elemento di A è anche elemento di B ma esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A. È chiaro che anche questa relazione possiede la proprietà transitiva; si ha cioè:

se $A \subset B$ ed anche $B \subset \mathrm{C}$, allora $A \subset C$.

A proposito di questa relazione e delle proprietà formali possiamo fare osservazioni analoghe a quelle fatte precedentemente. La relazione di inclusione tra due insiemi può del resto essere definita mediante le operazioni che esporremo subito, e le proprietà della relazione possono diventare dei teoremi, che si dimostrano in base alle proprietà delle operazioni stesse.

Sia dato un insieme I, che chiameremo *universo*; d'ora innanzi, e fino ad avviso contrario esplicito, tutti gli insiemi che nomineremo saranno considerati come dei sottoinsiemi di I. Siano dunque dati altri insiemi $A, B, C, \ldots$; si possono definire su di essi delle operazioni nel modo seguente:

a) *Operazione di intersezione*. Dati due insiemi A e B si considera l'insieme (di elementi di I) che appartengono sia ad A che a B. Questo insieme può essere eventualmente vuoto se A e B non hanno elementi comuni, e non dipende dall'ordine in cui A e B sono considerati. Esso può venire considerato come il risultato di un'*operazione* sui due insiemi, operazione che viene chiamata *intersezione* dei due ed indicata con il simbolo

$A \cap B$.

Dalle osservazioni fatte si ha dunque

$A \cap B = B \cap A$,

e ciò si esprime dicendo che l'operazione di intersezione è commutativa. Si ha poi ovviamente

$A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$; $A \cap I = A$.

La legge $A \cap A = A$ viene chiamata *legge di idempotenza* dell'operazione di intersezione.

Va ricordato che nei libri classici (a partire dall'opera di Boole) l'operazione di intersezione viene chiamata prodotto; ne segue che questa operazione di prodotto viene ad avere la legge "strana", che il quadrato di ogni elemento è uguale all'elemento stesso. È questa una delle osservazioni originali fatte da Boole, il quale nelle sue ricerche si rendeva conto del fatto che si poteva costruire un'Algebra diversa da quella che vale per i numeri. Si apriva così la strada ad ampliare la concezione della matematica, riconoscendo che gli oggetti di questa scienza possono essere anche degli enti diversi dai numeri o dalla quantità.

Adottiamo ora la convenzione abituale per l'uso delle parentesi nelle formule; secondo questa convenzione ciò che si trova fra due parentesi (una aperta ed una chiusa) in una formula deve essere interpretato come un tutto unico. Con queste convenzioni si può esprimere una ulteriore proprietà della operazione di intersezione, proprietà che è espressa dalla formula

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

e che viene richiamata come *proprietà associativa* dell'operazione di intersezione. Ne consegue che, dati tre insiemi A, B, e C, ha senso l'insieme

$$A \cap B \cap C,$$

rappresentato da una formula nella quale non è necessario mettere delle parentesi, in forza della proprietà associativa.

È chiaro che la relazione di inclusione può essere definita mediante le operazione di intersezione ponendo $A \subseteq B$ se e soltanto se $A \cap B = A$.

Da questa definizione si può dimostrare la proprietà transitiva della relazione di inclusione: sia infatti $B \subseteq C$, cioè, in base alla definizione, $B \cap C = B$. Operando ora su entrambi i membri della prima uguaglianza con "$\cap C$", e tenendo conto delle relazioni supposte, valide si ha

$A \cap B \cap C = A \cap C = A \cap B = A$, cioè $A \subseteq C$.

b) *Operazione di unione*. Dati due insiemi A e B si può considerare l'insieme che è costituito dagli elementi che appartengono almeno ad uno di essi. Tale insieme non dipende dall'ordine nel quale i due insiemi sono considerati e viene indicato col simbolo

$$A \cup B.$$

Si hanno quindi le proprietà seguenti:

$$A \cup B = B \cup A\,;\; A \cup \emptyset = A\,;\; A \cup A = A\,; A \cup I = I.$$

Anche la terza di queste proprietà appariva paradossale a Boole, soprattutto se si considera che la operazione di unione veniva chiamata 'somma' ed indicata spesso con il simbolo "+", che appunto indica la somma dei numeri.

Infine anche l'operazione di unione gode della proprietà associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

che ci autorizza d'ora innanzi a scrivere semplicemente $A \cup B \cup C$, e a pensare alla unione di un numero qualsivoglia di insiemi. Si può osservare che la relazione di inclusione potrebbe essere definita anche basandosi sulla operazione di unione; si può porre infatti:

$$A \subseteq B \text{ se e solo se } A \cup B = B.$$

c) Infine tra le due operazioni ora presentate sussistono delle proprietà che vengono chiamate *distributive*, espresse dalle formule

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

e una proprietà che viene detta di *assorbimento* e che viene espressa da:

$$A \cap (A \cup B) = A\;;\; A \cup (A \cap B) = A.$$

d) Sia ancora I un insieme che chiamiamo *universo*. Considerato un insieme A che sia sottoinsieme di I, possiamo prendere in considerazione l'insieme che indichiamo con $\bar{A}$, e chiamiamo *complementare* di A rispetto ad I. Tale insieme è dato da tutti gli elementi di I che non appartengono ad A. Anche questo insieme si può concepire come ottenuto per mezzo di una operazione (che si potrebbe chiamare di *complementazione* rispetto ad I) e che ha certe proprietà formali:

$$\overline{(\bar{A})} = A \text{ (cioè il complementare del complementare di } A \text{ è } A \text{ stesso);}$$

$$\bar{\emptyset} = I\;;\quad \bar{I} = \emptyset\,;$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Le due ultime relazioni esprimono quelle che si chiamano abitualmente le *Leggi di De Morgan*. È evidente la analogia formale tra la prima relazione e la legge della doppia negazione.

Riassumiamo qui di seguito tutte le proprietà formali delle operazioni che abbiamo introdotto, per rilevare una specie di parallelismo tra le due operazioni di intersezione e di unione, che viene messo in evidenza dalla scrittura di relazioni analoghe sulla stessa riga. Tale parallelismo viene chiamato *dualità*, e fornisce una proprietà formale (esteriore) delle formule che traducono le proprietà e le relazioni.

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cup A = A$$

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad ; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap I = A \quad ; \quad A \cup I = I$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad ; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

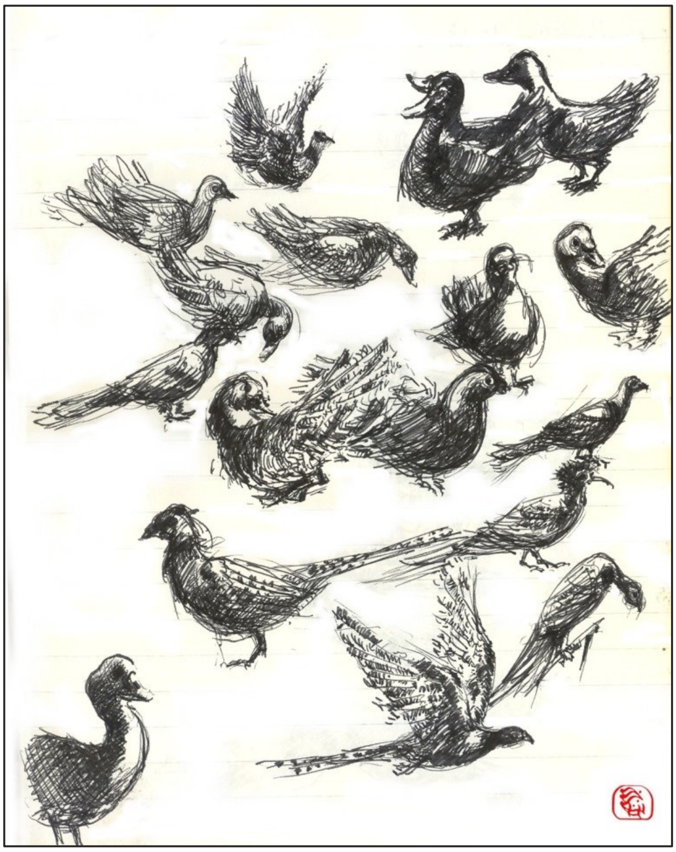
$$A \cap (A \cup B) = A \quad ; \quad A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{\emptyset} = I \quad ; \quad \overline{I} = \emptyset$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Questo parallelismo fra le operazioni dell'algebra di Boole permette per esempio di scrivere delle formule vere quando si conosca la verità di certe altre, semplicemente eseguendo gli scambi tra simboli che stanno su una medesima riga della tabella precedente.

Non intendiamo proseguire su questa strada che richiederebbe molte nozioni tecniche e vogliamo limitarci a fare qualche osservazione a proposito dell'algebrizzazione della logica di cui ci stiamo occupando. Ovviamente questa rivela la tendenza a due processi che abbiamo rilevato già a proposito della matematizzazione della scienza: il processo di simbolizzazione, cioè dell'abbandono del linguaggio comune e naturale per l'utilizzazione sempre più frequente e metodica del simbolo artificiale, e la tendenza a ridurre la deduzione a un calcolo, cioè alla utilizzazione delle proprietà formali dei simboli utilizzati, che hanno una loro sintassi, cioè certe loro leggi, le quali, per così dire, diventano operanti indipendentemente dal significato dei simboli. Vedremo infatti in seguito che l'algebra di Boole può essere utilizzata non soltanto per operare sui sottoinsiemi di un insieme, chiamato convenzionalmente *universo*, ma anche per operare sulle proposizioni, ed ottenere un calcolo delle proposizioni (Aussagenkalcül) che ha le stesse proprietà formali del calcolo sui sottoinsiemi; in sostanza si tratta ancora una volta della tendenza di utilizzare certi schemi sintattici di linguaggio nell'introdurre in essi diversi significati concreti.



A.Mazzotta. ***Insiemi*****…….(2)**

4 - Rapporti tra l'algebra di Boole e la logica.

Cerchiamo ora di approfondire l'analisi dei rapporti tra l'algebra di Boole e la logica, ritornando su ciò che abbiamo detto poco fa (§ 2) a proposito del legame tra insiemi e proprietà. Indichiamo ora semplicemente con $P(x)$ una proposizione *aperta* che riguarda un oggetto x, attribuendogli un predicato P; sia per esempio la proposizione $P(x)$ la seguente: "L'oggetto x ammette il predicato P", come sarebbe per esempio "Il numero x è primo".

Introduciamo ora l'operatore che viene detto di *generalizzazione*. Supponiamo che, quale che sia la proposizione $P(x)$, esista un insieme A formato dagli oggetti ai quali si applica il predicato P: questo supposto insieme viene indicato con la formula seguente: $A = \{x \mid P(x)\}$, leggendo 'A è l'insieme degli elementi x a cui conviene il predicato P', o anche 'A è l'insieme degli x per i quali $P(x)$ è vera'. Quindi in modo intuitivo si ha che le due proposizioni: "$x \in A$ “, e "$P(x)$ è vera" sono equivalenti quale che sia x.

Osserviamo ora che la distinzione tra insieme ed elemento è stata lasciata finora nel vago, ed affidata all'intuizione, la quale si fonda sul significato dei termini negli esempi concreti che abbiamo presentato per poter assicurarci di dare al termine *insieme* un certo significato. Ma dal punto di vista del rigore non siamo autorizzati a distinguere tra i due concetti, e pertanto utilizzeremo d'ora innanzi soltanto le lettere minuscole. Supponiamo ora che la condizione $P(x)$ sia espressa nella formula seguente: $x \notin x$, dove con il simbolo " $\notin$ " si è indicata la negazione della relazione di appartenenza. Utilizziamo adesso l'operazione di generalizzazione e supponiamo che esista un insieme a definito dalla condizione logica ora presentata: sia dunque: $a = \{x \notin x\}$. In base alla definizione di operatore di generalizzazione si ha quindi $x \in a$ se e soltanto se $x \notin x$, e ciò è vero quale che sia x. In particolare facendo $x = a$ si ottiene $a \in a$ se e soltanto se $a \notin a$. Siamo dunque giunti a una contraddizione, che consegue dall'applicazione indiscriminata dell'operatore di generalizzazione. Si osservi infatti che la condizione logica $x \notin x$ non è affatto contraddittoria, presa in sé; anzi è addirittura soddisfatta dagli insiemi che potremo dire *normali*, seguendo qualche autore. Invero la condizione dice che l'insieme x non è elemento di se stesso; pertanto si tratta di un insieme come quelli che vengono alla mente, che sono gli insiemi concreti: l'insiemi dei cappelli non è un cappello, l'insieme degli uomini non è un uomo, l'insieme delle parole non è una parola, ecc. Pertanto si potrebbe dire che la contraddizione, anzi l'antinomia che si presenta, non dipende affatto dalla condizione logica, ma dall'applicazione dell'operazione di generalizzazione; cioè l'antinomia insorge nel momento in cui si pretende di parlare dell'insieme di tutti gli insiemi normali. La soluzione dell'antinomia che venne data da B. Russell (1872 – 1970) rientra nell'ambito dello spirito in cui si muove la logica formale, a questo livello; secondo questo spirito si rinuncia al "significato" dei simboli e pertanto non può essere affidato alla coscienza di tale significato l'uso corrente dei simboli, che viene suggerito dall'intuizione. Secondo questa, appare del tutto ovvio che il simbolo $a \in A$ ha un senso soltanto se a è un elemento ed A un insieme al quale l'elemento appartiene.

Se si rinuncia a dare un significato ai simboli, occorre enunciare delle regole formali, che vengono chiamate regole di sintassi, in modo da proibire la formula $a \in a$, oppure la sua negazione, $a \notin a$. La soluzione che Russell dà introduce esplicitamente una specie di classificazione degli enti di cui si occupa la logica in *tipi*. Ciascun oggetto singolo sta al *tipo zero*; un insieme di oggetti singoli è di *tipo uno,* ed in generale un insieme di oggetti di *tipo n* è di *tipo n+1*; la relazione $a \in b$ può essere scritta soltanto se l'oggetto di sinistra è di tipo *n* e quello di destra è di tipo $n + 1$, quale che sia l'intero n.

Non possiamo qui soffermarci ad elencare e a classificare le antinomie che sono state trovate, seguendo questo filone della logica formale; ci limitiamo a ricordare qui una antinomia che è data da un'operazione che sembra del tutto legittima ed abituale e che definisce un elemento di un insieme a partire da tutti gli altri. Nelle righe che seguono daremo la versione semplificata della cosiddetta 'antinomia di Richard'.

Si pensi all'insieme dei numeri interi supposto conosciuto. Questo insieme ha una proprietà che si esprime dicendo che esso è *beneordinato*. Qui la parola *beneordinato* (e le derivate, per esempio *buon ordinamento*) ha un significato tecnico preciso. Essa significa che:

a) L'insieme dei numeri interi è ordinato;

b) Ogni sottoinsieme dell'insieme, (e quindi anche l'insieme stesso), ammette un primo elemento, cioè un elemento che non ha alcun precedente, naturalmente rispetto all'ordinamento considerato.

Abbiamo parlato di ordinamento secondo l'accezione comune; se volessimo essere più precisi possiamo osservare che un ordinamento è determinato da una relazione binaria, che può essere indicata per esempio con un simbolo del tipo $a < b$, leggendo 'a precede b'; questa relazione ha la proprietà transitiva; si ha cioè: se $a < b$ ed anche $b < c$, allora è $a < c$. Se inoltre, quali che siano due elementi dell'insieme, deve necessariamente sussistere una delle tre relazioni: $a < b$, oppure $b < a$, oppure $a = b$, si suol dire che la relazione considerata determina nell'insieme un *ordinamento totale* e che l'insieme, rispetto a quella relazione, è totalmente ordinato. Una relazione cosiffatta si ha nell'insieme dei numeri naturali, interpretando la formula $a < b$ come se esprimesse che il numero a è minore del numero b.

(*Paradosso di Richard – Berry*). Scegliamo una lingua, per esempio la lingua italiana, e rappresentiamo tutti i numeri naturali scrivendoli nella lingua scelta: uno, due, tre, quattro, cinque, sei, ecc. Ogni numero sarà rappresentato con un certo numero di lettere dell'alfabeto, e possiamo poi convenire di ordinare i numeri, secondo l'ordinamento naturale, quando sono rappresentati con lo stesso numero di lettere. Per esempio scriveremo prima di tutti gli altri i numeri rappresentati con tre lettere e lo faremo nell'ordine seguente: uno, due, tre, sei. E così via

Pensiamo ora alla frase seguente: *"Il più piccolo numero che non può essere rappresentato con meno di cento lettere".* Osserviamo che i numeri rappresentati con più di cento lettere formano un sottoinsieme dei numeri. Poiché l'insieme degli interi naturali è bene ordinato, esisterà un minimo numero di questo insieme. Questo è completamente determinato dalla frase che abbiamo scritto. Pertanto questo numero è rappresentato con meno di cento lettere, mentre la definizione dice che non può essere determinato con meno di cento lettere. (*)

Come abbiamo già detto, non intendiamo proseguire sulla strada della presentazione e della analisi dei paradossi e delle antinomie logiche; ci limitiamo a chiudere questo paragrafo con una osservazione che riguarda l'osservazione che abbiamo fatto più volte: quando si impone a un insieme dato una condizione logica si ottiene un sottoinsieme dell'insieme stesso. In una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi questa osservazione viene esplicitamente presentata come un assioma, che prende il nome di assioma di specificazione. A proposito di questo, si potrebbe osservare che questo assioma parte da un insieme che si suppone dato. Questa frase può essere ritenuta come chiara, ma deve essere precisata, per poter essere utilizzata con sicurezza. Invero che cosa significa che un insieme *esiste*, ovvero *è dato*?

Ovviamente nel caso nel caso degli insiemi concreti, che hanno un numero finito di elementi concretamente ostensibili, non vi sono dubbi. Ma non appena si passa ad insiemi che non soddisfano a questa condizione le difficoltà insorgono. Invero si potrebbe dare un insieme mediante una legge per costruire in modo ricorrente i suoi elementi: è questo il caso che si potrebbe accettare per l'insieme degli interi naturali. Proprio il fatto che questo insieme non sia finito porta con sé la sua definizione e la sua costruzione. Invero si dice che l'insieme degli interi non è finito, proprio perché dato che sia un intero, aggiungendo una unità se ne ottiene un altro, diverso da tutti i precedenti. In altre parole si tratta di una legge di costruzione, che addirittura definisce l'insieme, ovviamente senza che se ne possa dare concretamente ogni elemento agli occhi.

Si potrebbe pensare che un insieme si possa dare mediante una condizione logica, ma abbiamo già visto, nel caso del paradosso di Russell, che questa procedura può portare delle antinomie. Queste osservazioni potrebbero giustificare la insorgenza della scuola intuizionista, la quale rifiuta di accettare l'esistenza di un ente matematico quando non ne sia data esplicitamente la legge per costruirlo con un numero finito di operazioni ben determinate e concrete. Si aprirebbe qui tutto il capitolo della teoria delle funzioni ricorsive e delle conseguenze, che riguardano anche la logica ecc. Ci limitiamo qui a ricordare la questione della doppia negazione, che l'intuizionismo rifiuta. Si pensi, per dare un'idea, al ragionamento seguente. Si consideri una proprietà $P(x)$ e si immagini di aver dimostrato che non tutti gli interi naturali posseggono tale proprietà. Pertanto, si potrebbe dire, esisterà un numero minimo di questo sottoinsieme, numero che può essere ritenuto ben definito dalle considerazioni svolte fin qui. Tuttavia l'intuizionismo rifiuta di prendere in considerazione questo numero, fino a che non si dia un procedimento preciso e concreto, consistente in un numero finito di operazioni ben determinate, che conduce alla costruzione di tale numero.

Il programma ristretto di questo nostro lavoro ci impedisce di approfondire l'analisi in questa direzione, analisi che richiederebbe da sola un lavoro di mole molto maggiore del presente. Ci limitiamo ad osservare che potremmo accostare questo atteggiamento a quello che conduce alla definizione operativa degli enti della fisica. Qualche filosofo della scienza è andato tanto in là da dire che un ente della Fisica coincide con la propria definizione operativa. Non c'è bisogno di arrivare fino a questo punto e pensiamo che sia sufficiente dire che in questo ordine di idee ci rifiutiamo di parlare di un ente della fisica fino a che non si precisa una tecnica che conduce al suo rilevamento sperimentale. Questa richiesta appare del tutto legittima, ed anzi privilegia la ragione di fronte alla fantasia. Per esempio, questa impostazione permise di risolvere le antinomie dei modelli atonici primitivi (atomo di Bohr) osservando che non è affatto legittimo trasferire nella fisica atomica e subatomica le categorie spaziali della geometria che valgono per le esperienze e le dimensioni umane. E ciò perché ovviamente i concetti della geometria traggono la loro origine da una estrapolazione fantastica di certe esperienze alla scala macroscopica, che sono adattate alla scala atomica soltanto 'fino a prova contraria'.

A.Mazzotta. ***Insiemi……(3)***

5 - Gli sviluppi della logica formale.

Cercheremo ora di dare qualche idea degli sviluppi della logica formale di oggi; osserviamo che il problema è di difficile soluzione, perché questa dottrina si avvale in modo ineliminabile del formalismo convenzionale che è molto vicino al formalismo matematico, e quindi ogni esposizione che non voglia premettere in modo metodico lo studio del formalismo algebrico è destinata a restare necessariamente monca ed incompleta. In linea pregiudiziale, vorremo ricordare quale sia l'atteggiamento della logica classica: abitualmente le trattazioni iniziavano con l'analisi dei termini, proseguivano poi con l'analisi dei giudizi (proposizioni e predicati), ed infine giungevano alla tecnica della deduzione, che si fonda sul sillogismo e sulle sue leggi.

Non vogliamo qui presentare queste regole, ma ci limitiamo a osservare che anche la logica classica aveva certe regole per così dire meccaniche per garantire la validità della deduzione e per costruire dei sillogismi validi da altri sillogismo validi. Si potrebbe dire che anche nella impostazione classica si aveva una specie di algebra rudimentale, la cui esistenza consegue sostanzialmente dal carattere formale della dottrina. Si potrebbe dire che l'impostazione moderna capovolge l'impostazione classica e si occupa anzitutto della tecnica di deduzione, tecnica che si appoggia all'Algebra di Boole; in un secondo tempo si giunge all'analisi dell'operazione di predicazione. In un certo senso si potrebbe dire che nella logica moderna si privilegia il momento della deduzione formale, che diventa un vero e proprio calcolo; pertanto si potrebbe dire che questa evoluzione della logica è in linea con quanto abbiamo osservato in III/§ 7, quando abbiamo detto che l'impiego del simbolo matematico per rappresentare le osservazioni e delle relazioni matematiche per esprimere le ipotesi porta poi come conseguenza che il momento della deduzione diventa un calcolo, che sfrutta le !e regole sintattiche dei simboli usati. Noi manterremo qui il nostro discorso ad un livello il più possibile lontano dall'algebra astratta e vicino alla intuizione.

Indichiamo con p, q, r, s,… delle proposizioni non analizzate, cioè delle proposizioni nelle quali non distinguiamo il soggetto, il predicato verbale ecc. Ciò su cui ci fermeremo sarà il *valore di verità* delle proposizioni. Per la logica che ci interessa, tali valori di verità possibili per una proposizione saranno soltanto due: il vero ed il falso. Ricordiamo tuttavia che è stata impostata anche la costruzione di una logica formale, del tipo di quella che stiamo presentando, nella quale una proposizione può avere più di due valori di verità; in particolare, una logica formale cosiffatta è stata sviluppata per la trattazione teorica dei problemi del calcolo delle probabilità.

I valori di verità di una proposizione possono essere indicati convenzionalmente con il simbolo V (vero) e F (falso); noi useremo qui la convenzione di indicare il valore di verità "Vero" con il simbolo 1, e il valore "Falso" col simbolo 0, avvertendo tuttavia che non si tratta di numeri, ma di simboli puramente convenzionali. Per esempio, alla proposizione "Il *tre* è un numero dispari" attribuiamo il valore di verità 1, ed alla proposizione "Il triangolo ha quattro lati" attribuiremo il valore di verità 0.

Il nostro scopo, come è stato detto, è quello di introdurre delle operazioni sulle proposizioni, del tipo delle operazioni algebriche, in modo che dalle proposizioni semplici si possano costruire delle proposizioni da dirsi composte, e che i valori di verità delle proposizioni composte possano essere conosciuti quando si conoscano i valori di verità delle componenti. Introdurremo perciò degli operatori, i quali vengono espressi da quelli che si chiamano *simboli sincategorematici*, cioè da simboli che hanno senso soltanto quando sono usati insieme con altri, nel nostro caso insieme con i simboli di proposizioni. A questo proposito, ricordiamo che esistono vari sistemi di simboli cosiffatti, che sfruttano varie convenzioni di rappresentazione. In linea di massima si può dire che esistono tre sistemi principali: il sistema di simboli della scuola tedesca di Hilbert, che noi adotteremo qui; il sistema della scuola anglosassone, di Russell e Whitehead (1861 – 1947) (sistema tuttavia ereditato da Peano (1858 – 1932); infine il sistema della scuola polacca di Lukasiewitz (1878 – 1956). Quest'ultimo presenta i caratteri di un grande rigore, ma è difficile di uso per chi non ha familiarità con il linguaggio della matematica.

Il primo operatore che viene presentato è l'operatore di negazione. Esso sarà indicato con il segno "¬", da leggersi "non". Pertanto la negazione della proposizione p sarà indicata con $\neg p$

(non p), ed avrà valori di verità opposti di quelli della proposizione p. Pertanto, con riferimento agli esempi presentati sopra, le negazioni delle proposizioni sopra presentate saranno le proposizioni: 'Non è vero che il *tre* è un numero dispari', e poi: 'Non è vero che il triangolo ha quattro lati.'

Si noti che nella logica classica esistono le coppie di proposizioni *contraddittorie*: una delle due deve essere vera e l'altra è necessariamente falsa; nel nostro atteggiamento non possiamo fare un'analisi di questo tipo, perché la nozione di contraddittorietà è basata proprio sul carattere delle singole proposizioni (una per esempio universale affermativa, l'altra singolare negativa) mentre qui noi ora badiamo soltanto al valore di verità delle proposizioni.

Il passo successivo da compiersi è quello che porta a esaminare le operazioni su due proposizioni p e q. Abbiamo detto che la cosa interessante per noi è il valore di verità che acquista la proposizione composta dalle due quando si conoscano i valori di verità di queste; ora i valori di verità delle due proposizioni p e q ammettono quattro combinazioni, e pertanto una proposizione composta sarà precisata quando si saranno dati i valori di verità in corrispondenza delle combinazioni possibili. In linea di massima quindi sono possibili I6 proposizioni composte. Nella tabella che segue presenteremo quelle che sono usate più frequentemente, insieme con il connettivo che viene utilizzato per esprimerle.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Analizzeremo ora i singoli connettivi cercando di dare anche il loro significato:

a) $p \vee q$; la proposizione viene letta 'p oppure q' o anche 'p vel q', ed è vera quando almeno una delle due è vera.

b) $p \wedge q$; la proposizione viene letta 'p e q', ed è vera nel solo caso in cui entrambe siano vere.

c) $p \rightarrow q$; la proposizione viene letta "p implica q, od anche "se p allora q", oppure infine "p freccia q". La relazione che essa stabilisce tra le due proposizioni viene chiamata *implicazione materiale*. Questa denominazione è stata fonte di moltissimi equivoci, perché, come abbiamo più volte ricordato, l'implicazione della logica classica era fondata sull'analisi delle proposizioni, cosa che qui non si fa.

d) $p \leftrightarrow q$; la proposizione viene letta spesso "p è equivalente a q", e la relazione viene chiamata di equivalenza o anche *doppia implicazione*. Anche in questo caso la denominazione è stata fonte di moltissimi equivoci, così come il termine implicazione. È chiaro che l'equivalenza di cui si tratta qui non si ottiene dalla analisi delle proposizioni e quindi non discende dalla implicazione, così come è concepita nella visione classica.

In generale, conviene ricordare che secondo lo spirito di questa trattazione, che riguarda ripetiamo le proposizioni non analizzate, il significato del connettivo è dato soltanto dall'insieme dei valori di verità, cioè da quella che viene chiamata la *matrice di verità* del connettivo; tale matrice di verità viene data scrivendo la successione di simboli che caratterizzano il connettivo, come è specificato dalla tabella. Si ha dunque:

$p \vee q$	[1 1 1 0]
$p \wedge q$	[1 0 0 0]
$p \rightarrow q$	[1 0 1 1]
$p \leftrightarrow q$	[1 0 0 1]

Si verifica quindi, per esempio, che invece che con l'operatore $p \rightarrow q$, si può operare con $\neg p \vee q$, come fa qualche autore; si ottiene così il risultato di evitare gli equivoci che sono provocati talvolta dal nome improprio di 'implicazione materiale' che viene dato al connettivo 'freccia'. È possibile far vedere che la intera gamma degli operatori che interessano può essere generata con un solo operatore. Ma non ci soffermiamo su questi argomenti che riguardano degli sviluppi formali particolari.

Più interessante invece è la analisi delle leggi formali del calcolo che stiamo presentando. Tali leggi sono analoghe a quelle dell'algebra di Boole che regola le operazioni sui sottoinsiemi di un insieme:

$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$; $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ (*proprietà commutativa*)

$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge \mathrm{r})$ (*proprietà associativa*)

$(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$; $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (*proprietà distributiva*)

$\neg (p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$; $\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (*leggi di De Morgan*).

Tutte queste formule possono essere verificate, per esempio, in base alle matrici di verità dei connettivi che sono coinvolti. Si suol dire che le formule ora scritte danno delle *tautologie*, cioè delle proposizioni che hanno il valore di verità '1' quali che siano i valori di verità delle proposizioni che entrano nella formula composta. Ritorneremo in seguito su queste proposizioni; rivolgiamoci ora alla questione delle regole di deduzione; infatti, si potrebbe dire che non basta dare i connettivi tra le proposizioni, ma occorre anche assegnare le regole in base alle quali si possono eseguire i calcoli presi in considerazione.

Un problema riguarda la precisazione delle formule che sono ammesse nel nostro calcolo; si giunge così alla definizione di *formula ben formata* (abbreviata in fbf). Questa definizione viene data in forma ricorrente con le seguenti regole:

a) ogni simbolo di proposizione singola è un fbf;

b) se P è una fbf, anche $\neg P$ è una fbf;

c) se P e Q sono fbf, anche $P \vee Q,\ P \wedge Q,\ P \rightarrow Q,\ P \leftrightarrow Q$ sono fbf

d) nessun'altra formula, diversamente ottenuta, è una fbf.

Un secondo problema riguarda la scelta delle proposizioni primitive, ovvero le tautologie, che saranno il punto di partenza da cui verranno dedotte tutte le altre proposizioni accettate nella teoria. Possiamo scegliere per esempio le seguenti proposizioni (Hilbert):

A1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

A2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

A3) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow \big((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q\big)$.

Da questi assiomi è lecito dedurre altre proposizioni con le seguenti regole:

I) *Regola del distacco,* ovvero del *modus ponendo ponens*: se una proposizione P compare tra gli assiomi, oppure è già stata dedotta, e se la proposizione $P \rightarrow Q$ compare tra gli assiomi oppure è già stata dedotta, allora è lecito enumerare tra le proposizioni accettate anche la Q.

II) *Regola della sostituzione*: è lecito sostituire in ogni formula ad una proposizione P un'altra qualsivoglia ad essa equivalente. In particolare è lecito sostituire una lettera con un'altra in ogni occorrenza.

Diamo qui di seguito l'idea di una dimostrazione fatta con queste regole, per poter esemplificare lo spirito al quale si ispira questo tipo di ricerca. Sia da dimostrare la proposizione $P \rightarrow P$. Il problema potrebbe apparire ovviamente privo di senso qualora si assegnasse al simbolo 'P' il significato di proposizione ed al connettivo *freccia* il significato abituale di *implicazione*; invero appare assolutamente chiaro a chiunque che una proposizione implica se stessa; ma nello spirito di questa logica la dimostrazione va ottenuta soltanto con le regole del nostro calcolo e ciò per ottenere quel rigore assoluto e quella generalità, che sono lo scopo anche non espresso della matematizzazione della logica.

In A2 si sostituisca p ad r in ogni occorrenza della lettera r; si ottiene:

$\left(p\ \rightarrow (q\ \rightarrow p)\right) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p\ \rightarrow p))$.

Con questa sostituzione la prima parte di A2 viene a coincidere con A1. Quindi la regola del distacco autorizza a scrivere la seconda parte da sola: scriviamo quindi la seconda parte, mettendo al posto di *q* la proposizione $p\ \rightarrow p$; si ha dunque ora

$$\left(p\ \rightarrow (p\ \rightarrow p)\right) \rightarrow (p\ \rightarrow p).$$

Anche qui la prima parte è A1, in cui si è posto *p* al posto di *q*; applicando ancora la regola del distacco si ottiene la tesi $p \rightarrow p$.

Non ci dilunghiamo ulteriormente a questo livello e ci limitiamo a enunciare il teorema in certo senso centrale di questa teoria, il quale afferma che ogni formula che sia una *tautologia*, cioè che abbia valore di verità 1 quale che sia il valore di verità dei simboli che entrano, può essere ottenuta con la procedura che abbiamo presentato, a partire da un sistema di assiomi quale per esempio il sistema di Hilbert, che abbiamo presentato.

È facile tuttavia osservare che il calcolo logico che abbiamo presentato fin qui è molto rudimentale per soddisfare alle esigenze del ragionamento abituale. In particolare per esempio, gli assiomi che fondano l'aritmetica non possono essere enunciati ed elaborati soltanto al livello del calcolo delle proposizioni non analizzate che abbiamo trattato fino ad ora. È quindi necessario fare un passo innanzi e tentare di analizzare il giudizio con questi mezzi. Nel prossimo paragrafo presenteremo quindi il *calcolo dei predicati*.

6 - Il calcolo dei predicati.

Sia $P(x)$ una forma proposizionale aperta: chiamiamo così una proposizione che presenti una lacuna, come per esempio: "x è un numero primo". Ovviamente questa forma proposizionale aperta acquista un valore di verità quando al posto della "x" si ponga il nome di un ente dell'universo di discorso; nel caso in esame, quando si colmi la lacuna con il simbolo di un numero. Tuttavia si osserva che non è questo il solo modo di "chiudere" la forma posizionale data; è possibile infatti utilizzare i cosiddetti quantificatori, che permettono di simbolizzare dei giudizi che si riferiscono a tutti gli elementi di un insieme, oppure ad alcuni elementi di questo. I principali quantificatori sono i due seguenti:

Il quantificatore *universale*, il quale permette di simbolizzare la proposizione "Per tutti gli x è vera $P(x)$". Questa proposizione viene simbolizzata con i simboli $\forall x\ P(x)$. È chiaro che se per esempio la proposizione aperta è: 'x è un numero primo', la quantificazione universale dà luogo alla proposizione falsa: 'Ogni numero è primo'.

Un secondo quantificatore frequentemente usato è il cosiddetto quantificatore *esistenziale*: a partire da una proposizione aperta esso dà luogo alla proposizione: “Esistono degli x tali che $P(x)$ è vera”; per esempio nel caso considerato si ottiene la proposizione vera 'Esistono dei numeri che sono primi'. Tale frase viene simbolizzata con $\exists x\ P(x)$.

Questi quantificatori non sono logicamente indipendenti: per esempio il quantificatore esistenziale potrebbe essere sostituto dalla formula $\neg(\forall\ x\ (\neg P(x)))$: non è vero che $P(x)$ è falsa per ogni x.

Il caso della proposizione che presenta una lacuna non è il più generale: si potrebbero infatti pensare delle proposizioni con due o più lacune: per esempio: 'x è padre di y', oppure 'x è figlio di due coniugi y e z'. Si hanno quindi delle forme proposizionali che vengono chiamate *predicati pluriargomentali*: $P(x, y)$, $P(x, y, z)$, e così via.

È chiaro che nello spirito della logica formale che abbiamo esposto nel precedente paragrafo, si possono dare delle regole per manovrare questi simboli e per dedurre utilizzandoli delle proposizioni vere. Non possiamo qui dilungarci nella esposizione della tecnica della logica formale considerata da questo punto di vista; ci limitiamo a ricordare che questo secondo gradino rispetto alla logica elementare del calcolo delle proposizioni non analizzate non è ancora sufficiente perché si possa analizzare formalmente una teoria matematica che abbia una certa importanza. Invero, come vedremo, per fondare una teoria dei numeri interi secondo Peano, occorre utilizzare degli strumenti logici superiori a quelli considerati finora; infatti, occorre enunciare delle proposizioni che contengano delle quantificazioni che riguardano non gli elementi di un universo, ma tutti i possibili predicati che possono teoricamente competere a questi elementi: in altre parole è necessario utilizzare degli enunciati non soltanto del tipo di quelli finora considerati, cioè del tipo “Per tutti gli x di un insieme è valida la proprietà tale”, bensì anche degli enunciati del tipo: “Quale che sia la proprietà di certi elementi di un insieme dato, è vero che....”. Questa quantificazione a un livello superiore porta a delle difficoltà formali ancora superiori a quelle che abbiamo finora considerato e fondamentalmente anche a delle difficoltà logiche e gnoseologiche superiori. D'altra parte non possiamo rinunciare a una logica che possa avere come argomenti almeno l'aritmetica elementare; altrimenti si costruirebbe una logica che non riesce a dominare i livelli più elementari della matematica e quindi non saprebbero dominare neppure gli elementi del linguaggio deduttivo della scienza.

Ma, come vedremo, le difficoltà nascono non soltanto dalla complessità formale di una logica cosiffatta, ma dai problemi gnoseologici che scaturiscono dall’impostazione stessa dei problemi logici che viene data seguendo questa linea. Invero si potrebbe dire che a proposito della logica rinascono dei problemi analoghi a quelli che abbiamo già incontrato parlando della nuova concezione della matematica. Abbiamo visto che quando si abbandona l'evidenza come fondamento delle proposizioni primitive della geometria, e si accettano queste semplicemente come conseguenza di una scelta in certa misura libera ed arbitraria, nasce immediatamente il dubbio che tra le proposizioni scelte sia nascosta una contraddizione, che non è evidente con lo sviluppo delle deduzioni a partire dalle proposizioni stesse. In questa impostazione il concetto tradizionale di verità viene sostituito dalla coerenza alle proposizione scelte come primitive; ma - abbiamo rilevato - anche a questo livello è necessario che il concetto di 'coerenza' sia accettato come primitivo e che sia assicurata la non contraddittorietà delle proposizioni di partenza. Non vi è quindi da meravigliarsi che la questione di dare una risposta all'interrogativo della garanzia della non contraddittorietà delle proposizioni 'vuote' che si assumono come iniziali di una teoria sia una delle più importanti e che abbia dato luogo agli sviluppi più importanti della logica formale moderna. Poiché non possiamo entrare in particolare tecnici, dobbiamo limitarci a dare qualche idea abbastanza vaga dalle questioni e di sfiorare il loro significato.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che uno dei grandi problemi è posto dalla necessità di dominare degli insiemi infiniti di enti: per esempio, nel caso di una logica che domini l'aritmetica elementare, è chiaro che occorre garantire che le dimostrazioni che si fanno valgono per ogni numero e, d'altra parte, è chiaro che i numeri interi sono in numero infinito, perché non ha senso parlare del più grande numero intero possibile, oppure basare una dimostrazione su questo concetto.

D'altra parte le dimostrazioni che si fanno nella logica del primo ordine (quella che riguarda le proposizioni non analizzate) conducono in linea di principio a basare la validità di una formula su un numero ben determinato di operazioni che permettono di calcolare il valore di verità della formula stessa. Queste operazioni sono in numero finito e ben determinato, anche se nei casi più complicati possono essere molto difficili da portarsi a termine; ma è concepibile farle eseguire da una macchina, quando sia univocamente programmata e possa programmare la propria condotta successiva dal risultato dei passi precedenti. Il che avviene per esempio con i calcolatori elettronici di oggi, i quali tuttavia non 'capiscono' il significato dei simboli che manovrano, ma semplicemente eseguono gli ordini che sono stati dati.

D'altra parte nella matematica, come abbiamo detto or ora, non è possibile limitarsi ad insiemi che abbiano un numero finito di elementi: ciò è ineliminabile per l'aritmetica elementare, e nell'analisi matematica classica vi è il problema della rappresentazione del continuo geometrico, che porta necessariamente alla considerazione di insiemi infiniti; in generale la teoria dei transfiniti fondata da Cantor, come vedremo, porta necessariamente alla considerazione di insiemi infiniti. Scaturì da considerazioni di questo tipo il progetto di D. Hilbert (1862 – 1943) che portò all'enunciazione della problematica di quella che egli chiamò la *Beweistheorie* (la teoria della dimostrazione) e che dovrà essere, nelle intenzioni di Hilbert e della sua scuola, l'uscita dalle difficoltà che abbiamo cercato di presentare. Secondo questo progetto, si pensava di poter accettare dei ragionamenti che utilizzano insiemi infiniti (o anche infiniti possibili atti di pensiero o altro) come contenuti del linguaggio della matematica. Ma questi procedimenti e questo linguaggio dovevano essere oggetto di studio di un metalinguaggio, che avrebbe dovuto procedere con procedimenti strettamente controllabili con atti concreti in numero finito, del tipo per intenderci di quelli che portano a garantire che una proposizione composta ha sempre il valore di verità '1' quali che siano i valori di verità attribuiti alle proposizioni componenti. Analizzeremo nel prossimo paragrafo questo problema e la situazione che nasce dalle analisi che gli sono state dedicate.

7 - Consistenza e non contraddittorietà. Il teorema di Gödel.

Abbiamo visto che l'impostazione strettamente formale della logica lasciava aperti alcuni problemi fondamentali, che sostanzialmente consistono nella necessità di assicurare la non contraddittorietà delle proposizioni scelte come iniziali e delle regole scelte come regole di deduzione. Vale la pena di ripetere l'osservazione che queste preoccupazioni lasciano tuttavia da parte il problema di assicurare il fondamento del significato della 'coerenza' delle regole scelte e della giustificazione della semplice operazione di 'riconoscere' i simboli vuoti o anche 'astratti' sui quali si lavora. Anche nel caso in cui la deduzione sia un puro calcolo e sia affidata ai meccanismi di un calcolatore elettronico, è necessario che questo riconosca in qualche modo i simboli adottati e che possa adottare il suo comportamento di conseguenza alle operazione di riconoscimento.

Tuttavia in questo ordine di idee l'evoluzione storica della logica formale portava alla impostazione del problema che era data da D. Hilbert. Secondo questa impostazione, il problema della giustificazione di procedimenti che operavano su insiemi infiniti era confidato alla logica che costituiva un metalinguaggio di fronte al linguaggio della matematica; questo metalinguaggio doveva, nelle intenzioni di Hilbert, essere giustificato dal fatto di utilizzare dei procedimenti che fossero per così dire fondati sulla immediata evidenza di operazioni eseguibili in un numero finito di atti concreti: riconoscimento di simboli, sostituzioni e calcoli di valori di verità, secondo regole codificate ed applicabili anche da macchine. Nella realtà delle cose lo svolgimento storico fu diverso da quello che veniva preveduto dal progetto hilbertiano.

Invero K. Gödel (1906 – 1978) arrivò a dimostrare che in ogni sistema logico, che sia abbastanza forte per esprimere almeno l’aritmetica elementare, si possono costruire delle frasi che sono *indecidibili*. In altre parole si possono costruire delle formule le quali non possono essere dimostrate, seguendo le regole valide nel sistema, ma che neppure possono essere invalidate, nel senso che non può essere dimostrata la loro negazione. Per esprimere la stessa cosa in termini meno precisi e più sfumati, si potrebbe dire che la validità, cioè la rispondenza della verità e del significato della formula ad una realtà esteriore, si conferma essere qualche cosa che è indipendente dal procedimento di dimostrazione della formula stessa e dal procedimento accettato per la dimostrazione. In particolare si potrebbe pensare ad un sistema logico capace di teorizzare l'aritmetica elementare e che possa garantire da se stesso, per così dire *dall’interno*, la propria non contraddittorietà. Anche questo risultato, come conseguenza del teorema di Gödel, risulta non raggiungibile; invero in un sistema cosiffatto esistono delle formule che sono vere, nel senso intuitivo e naïf del termine, ma che non sono dimostrabili e neppure invalidabili.

Pertanto si potrebbe dire che non è possibile vivere nella sola dimensione formale e sintattica della logica, senza un riferimento al concetto di verità nel senso di *adaequatio rei et intellectus*, che era il senso classico; oppure anche, senza riferimento a qualche cosa che è il significato del simbolo o del sistema di simboli adottato, a qualche realtà esteriore che è un 'contenuto' del linguaggio che viene adottato. Ricordando ciò che è stato detto sopra a proposito della geometria, si ritrova lo stesso fenomeno che è stato notato in quella occasione: la verifica della consistenza e della non contraddittorietà di un sistema teorico (in particolare di un sistema logico) non si può lasciare al sistema stesso, ma deve essere ricercata con riferimento ad una realtà esteriore, ad un qualche cosa di esistente (pur con tutte le riserve su questo termine di *esistenza*) che possa fornire un contenuto ai simboli a priori vuoti del sistema.

Qualcuno porrebbe osservare che questa conclusione rappresenta una sconfitta dell’impostazione critica e che tanto valeva accettare quella evidenza ingenua che fondava la trattazione euclidea della geometria; ma questo atteggiamento non sarebbe a nostro parere giustificato fino in fondo. Invero nella impostazione euclidea ed in generale nella impostazione newtoniana della meccanica, come in ogni impostazione che fa troppa fede alla supposta evidenza della elaborazione fantastica dei concetti, la teoria partiva da certi concetti che, contro ogni opinione, erano elaborati e complicati, e fondati su una immagine che aveva come contenuto delle sensazioni complicate e complesse, come quelle che hanno per oggetto gli enti della geometria classica; invece nella impostazione moderna l’evidenza ha come contenuto soltanto l’esistenza o meno di certi enti, la disposizione di certi simboli, l’applicazione o meno di certe regole sintattiche. In altre parole l’evidenza non è esclusa, ma ha come oggetto delle cose ben più radicali della evidenza su cui si basava la concezione euclidea: la presenza o l'assenza, l'applicazione o la non applicazione di certi procedimenti ben definiti ed elementari. Pertanto si potrebbe dire, per concludere, che non tutto il lungo cammino percorso è stato origine di una fatica inutile; anzi siamo giunti oggi ad una chiarificazione fondamentale del procedimento logico e dei suoi presupposti, della sua necessaria aderenza alla realtà concreta, fuori di noi.

8 - Il calcolo delle probabilità come una forma di logica delle decisioni in condizioni di incertezza.

Non vogliamo chiudere questo capitolo dedicato ad una rapidissima incursione nel campo della logica senza parlare del calcolo delle probabilità; invero questa dottrina è oggi considerata anche come un capitolo della logica e precisamente quel capitolo molto importante che si occupa dei processi di induzione.

È chiaro che non intendiamo qui, a questo livello, occuparci ex processo del problema della induzione; questo ha formato oggetto di molte discussioni storiche, a partire dalla critica di Hume delle leggi naturali e del significato delle nostre aspettative che il sole sorga ancora domani. A nostro parere infatti queste discussioni rientrano nella discussione generale che coinvolge il significato di una metafisica e il significato della nostra conoscenza, non soltanto a livello scientifico, ma a tutti i livelli. Sussistono tuttavia delle questioni che non sono puramente tecniche e che riguardano la statistica, intesa come scienza che tra gli altri scopi ha anche quello di raccogliere dati, di valutare le osservazioni e presentarle in modo sintetico, per poter fondare il processo di induzione, cioè per poter dare senso a quella ammissione delle ipotesi che è uno dei momenti fondamentali del nostro conoscere motivato.

È noto che il calcolo delle probabilità ha una origine relativamente recente tra le altre branche della matematica; origine che si fa risalire al famoso problema che fu posto a B. Pascal da un certo cavaliere di Méré (non altrimenti conosciuto) il quale aveva avuto delle discussioni a proposito della divisione delle poste in certi giochi d'azzardo. Non abbiamo qui la possibilità di esporre completamente lo sviluppo storico di questa dottrina e pertanto ci limitiamo a citare una pietra miliare di questo sviluppo, che è costituita dalla pubblicazione, nel I8I9, del celebre trattato di P. S. Laplace intitolato *Essai philosophique sur les probabilités*.

In questo libretto Laplace diede della probabilità una definizione che è ancora accettata oggi da vari autori; secondo le idee di Laplace, considerato un evento incerto, che presenti n casi possibili tra i quali soltanto r (meno di n) sono favorevoli, la probabilità p risulta essere data da un numero:

$$p = \frac{r}{n} ,$$

che rappresenta il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti ugualmente possibili.

Quest'ultima clausola appare abbastanza chiara a prima vista, ma è stata oggetto di fondate critiche: invero nella mentalità empiristica nella quale si pone Laplace non vi è nulla che garantisca a priori che i casi considerati siano tutti ugualmente possibili. L'enunciato può avere un senso nei casi particolari considerati: per esempio quando si lancia in aria una moneta che non presenta visibilmente dissimmetrie; oppure quando si lancia un dado che non presenta visibili squilibri.


DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali
tanto per l'vna, quanto per l'altra parte.

CON PRI VILEGI.

IN FIORENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

Firenze, 1532


Arcetri, Osservatorio

NdR.

1 - (*) Citiamo dall'Enciclopedia Treccani *on line*, voce "*Paradosso*":

………………………… P. di Berry. È una presentazione semplificata di quello di Richard: in italiano vi è un numero finito di sillabe, perciò finito è anche il numero delle definizioni di numeri naturali formulabili con non più di 50 sillabe. Definiamo numero di Berry «il più piccolo numero naturale non definibile con una frase composta di 50 sillabe al massimo». Ma questa definizione contiene meno di 50 sillabe, dunque, paradossalmente, il numero di Berry è definibile con non più di 50 sillabe.

……………………………………………..

…………………………………………..Se formalizziamo l'aritmetica in un sistema *S* con un numero finito di simboli elementari, per es. *x*, 0, 1, 2, 3, ..., 9, sufficienti a esprimere un'infinità di simboli composti: x_0, x_1, x_2, ..., allora il numero di Berry resta così definito: «il più piccolo numero del sistema *S* non definibile con un'espressione di *S* composta al massimo di cinquanta simboli elementari». È allora chiaro che il p. non sussiste più. Anche per il p. di Richard si possono fare considerazioni analoghe……………

…………………………………………………

2 - Molti altri spunti riguardanti le "*Note per il corso*" si possono trovare nell'Inedito:
(1976-1978) Materiale per il corso Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza. (Corso tenuto per il ciclo di specializzazione della Facoltà Teologica dell'Italia Settentrionale, Milano, negli anni accademici 1976-77, 1977-78, 1978-79). *Parte prima*. *Parte seconda*. *Parte terza: L'evoluzione della geometria ed il suo significato gnoseologico*.
Inoltre in molti altri interventi, in particolare negli Inediti:
0302 *Tipi di conoscenza: la conoscenza coinvolgente*. (Appunti e approfondimenti).
I Parte (2003), Note sulla conoscenza scientifica e sulla conoscenza coinvolgente.
II Parte (2000), Note su Leibniz. (**)
III Parte (2000), Riflessioni a commento dell'opera di Girolamo Pullo: Senso e significato. Introduzione all'intelligenza esistenziale e concettuale della Rivelazione.
9104 *Epistemologia della matematica*. Dispense per il ciclo di seminari per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica. Università Cattolica. Dipartimento di Matematica. Brescia. Anno Accademico 1991/92.

Ulteriori approfondimenti di alcuni temi si trovano nel testo
C. F. Manara. *Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi.* Vita e Pensiero, Milano, 1975. (Si presenta nel Sito il testo suddiviso in capitoli per renderne più agevole il download). Capitoli I e II. Capitoli III e IV. Capitoli V e VI.

3 – (***) In rete è disponibile: Études Epistémè, n° 9 (printemps 2006), pp. 345 – 368. Olivier Jouslin. *Science et baroque: la polémique sur le vide entre Blaise Pascal et Étienne Noël. (8 octobre 1647 - été 1648).*

4 – (****) È dedicato a G. W. Leibniz il numero 3, vol.1, Dicembre 2016 di Matematica, Cultura e Società (UMI). Fra gli articoli: M. Mugnai. *Leibniz e la logica*. 241 – 258.

5 – Consonanza di idee e ulteriori approfondimenti si trovano nel testo: M. Marchi, C. Oliva. *Scienza e verità. Riflessioni*. 2016 Edizioni Studium, Roma.

6 – È interessante anche la posizione consonante di Gianfranco Ravasi, consultabile agilmente in rete in Corriere della Sera - 27 novembre 2010. PER UNA COESISTENZA TRA SCIENZA E FEDE.